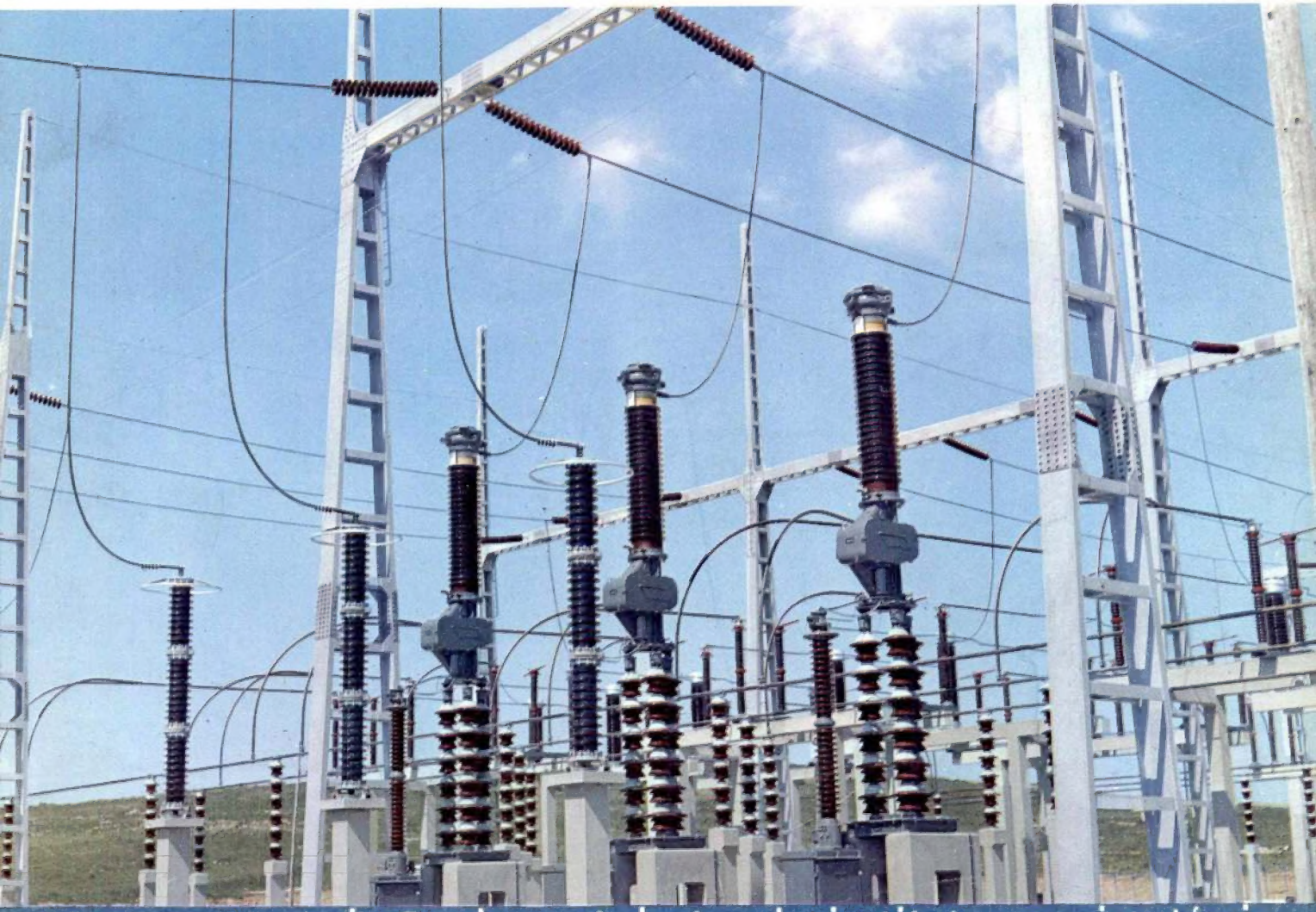
técnica



326

associação dos estudantes do instituto superior técnico

março 1963

revista de engenharia

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 49 1

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO
E DA CACHOFARRA

●

A **UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA** distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

PAVIMENTOS

COBERTURAS

VIGAS DE GRANDE VÃO

ASNAS

PERFIS

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.

AV. ESTADOS UNIDOS DA AMERICA, LOTE 3, 5.º D. TELEF. 774832/766446 LISBOA-5

TÉCNICA

Ano XXXVIII - N.º 326 Março de 1963

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-1. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

CORPO REDACTORIAL

J. M. VIEGAS GONÇALVES
A. ROMÃO DIAS
J. F. GOMES DE PINA
A. M. L. ESTEVES BRINCA

NUMERO AVULSO 15$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	65$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

PUBLICAÇÃO PERIÓDICA

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Disjuntor de 220 kV, 5.000 MVA de potência de corte, fabricado pela EFACEC, sob licença DELLE, instalado na Subestação de Alto de Mira (Amadora) da COMPANHIA NACIONAL DE ELECTRICIDADE.

Págs.

A evolução da Electrónica e das suas aplicações
Por António A. de Carvalho Fernandes 377

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** 384

Aplicação do método das analogias eléctricas ao estudo de alguns problemas relativos ao campo magnético das máquinas eléctricas
Por Carlos de Medeiros Portela 385

Resolução dum problema de condução de calor em regime não permanente em cilindros concêntricos
Por António Franco de Oliveira Falcão 409

Análise química por fotometria de chama
Por Armando Tavares da Silva 419

Fenómenos plásticos nas vibrações sísmicas
Por Frederico Machado 431

A propósito do artigo «Cargas transmitidas pelas lajes armadas em cruz às vigas que as suportam (métodos das bissectrizes)»
Por C. E. de Barros Vidal 439

Biblioteca 441

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A — Pág.

Agência Comercial, Lda. IV
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXXV
Agro-Mecânica XXX
Asea Eléctrica Ld.ª XXXII

C

CUF — Centro de Projectos XV
CIDEX IV
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Cimento «Tejo» XXXIX
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos IX
Companhia União Fabril XIV
Construções Técnicas, Ltd.ª XXIX
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VI e XXXVI

E

Ecomar XXXII
EFACEC XX
Electro-Arco, Ltd.ª XXVI
Electrotécnicos Reunidos XXXII
Emílio de Azevedo Campos & C.ª, Ltd.ª XXX
Empresa Electro Cerâmica XXXVIII
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XXVI
Empresa de fundações A. Cavaco . XXXVIII

F

Fábrica Portugal II
Fanafel XVI

H

Harker Sumner & C.ª, Ltd. XL

J

Jayme da Costa, Lda XVII

K — Pág.

Kellog International Corporation . XXXIV

M

MEC XXXII

O

Orlando Fernandes XVI

P

Papelaria Fernandes XXVII
Philips XIX
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª III

Q

Quimicor, S.A R.L. . . . . XXI e XXII

S

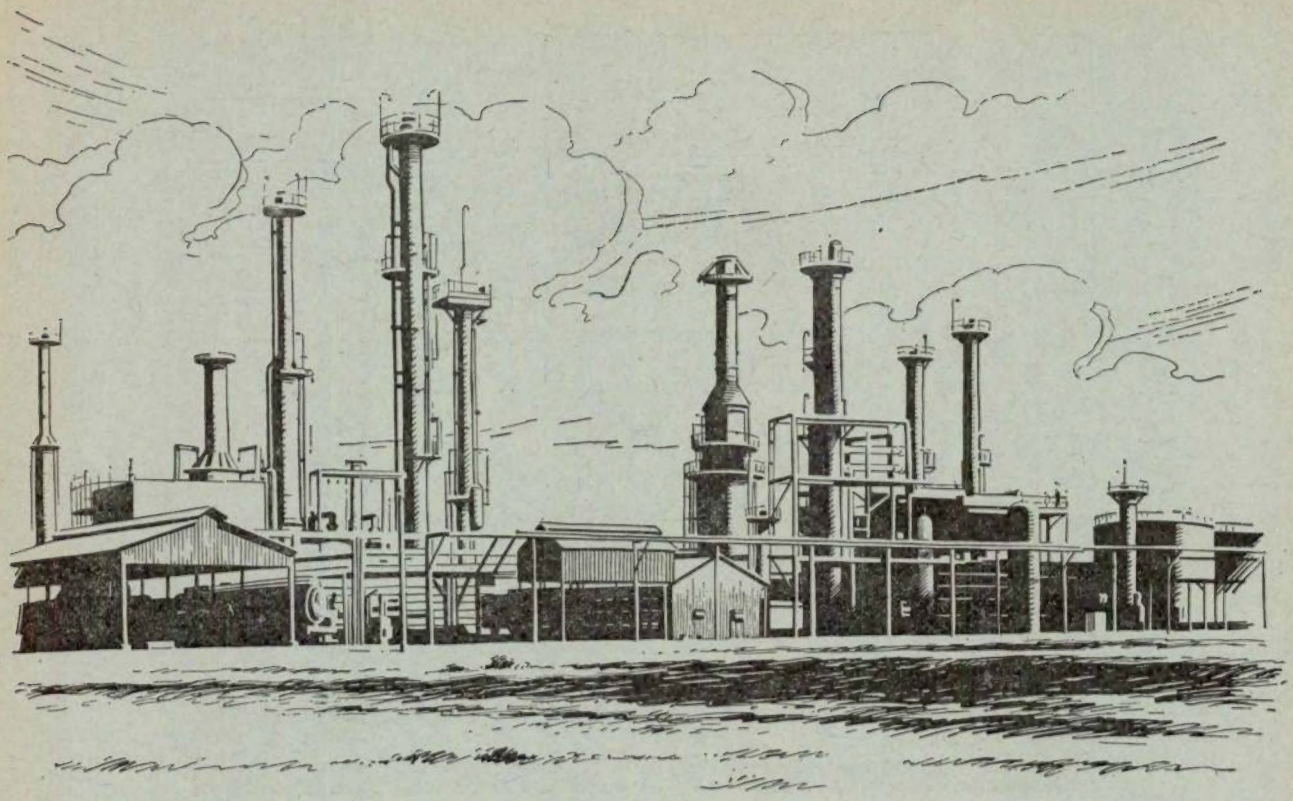
S. E. Moniz da Maia & Vaz Guedes, L.da XIII
Siemens XXXI
Soabal, Ltd. XII
S. Com. de Isolamentos de Cortiça XXXIII
SMEIA XXIII
Soc. Comercial Romar, Lda. XXIV e XXVIII
Sociedade Construtora Portuguesa, Ltd.ª I
Mobil Oil Portuguesa . . . . . 4.ª da capa
Société Louis de Roll V
Sociedade Comercial Luso-Italiana XXXVII
Sociedade Portuguesa Cavan VIII
Sondagens Ródio, Ltd.ª XXXVIII
Standard Eléctrica VII

V

Vasco Pessoa, Lda. XXXII

W

Wild Portugal, Lda. XXI
W. Schmidt XXXVII



Refinaria da Sonarep
(Matola — Moçambique)

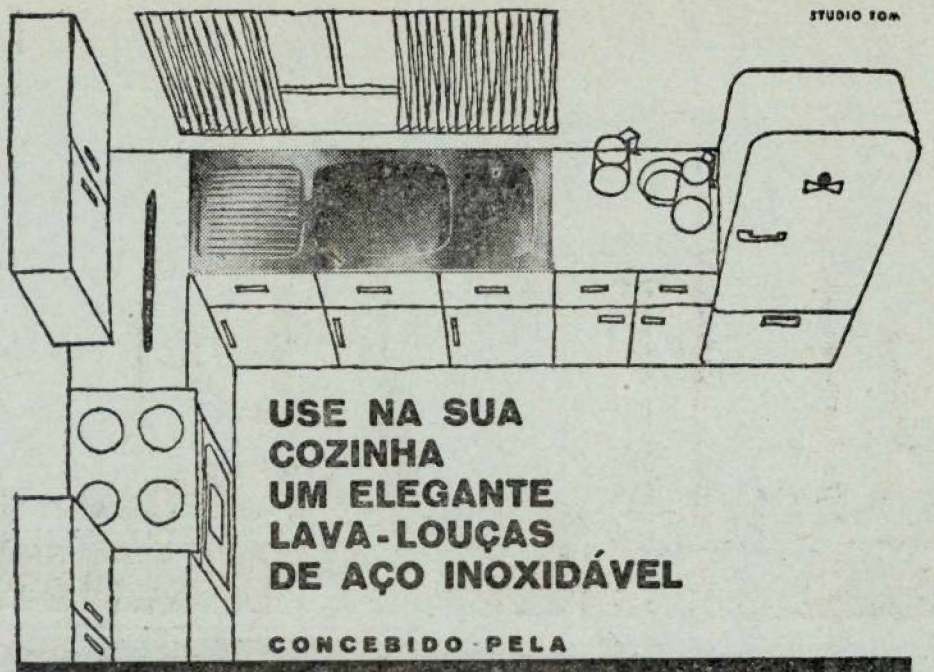
Assente sobre

ESTACAS FRANKI

Sociedade Construtora Portuguesa, Lda.

PRAÇA DO AREEIRO, n.º 9, 4.º-Esq. — LISBOA — TEL. 72 60 61 e 72 99 11

Av. da República — Prédio Santos Gil, 6.º-10 — Lourenço Marques — Telef. 91167

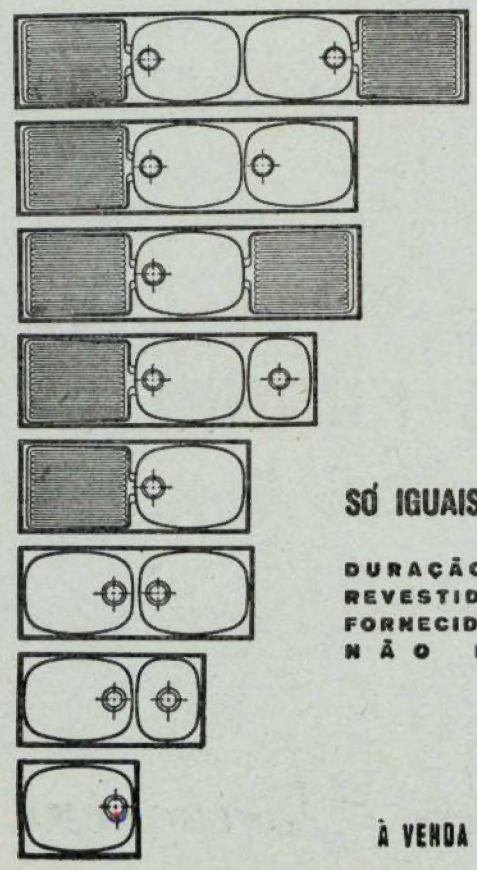


USE NA SUA COZINHA UM ELEGANTE LAVA-LOUÇAS DE AÇO INOXIDÁVEL

CONCEBIDO PELA

FABRICA PORTUGAL

PARA MODERNIZAR OS LARES DE PORTUGAL



APRESENTADOS EM

8 MODELOS

"STANDARD"

EXECUTAM-SE FORA DE SÉRIE, MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES

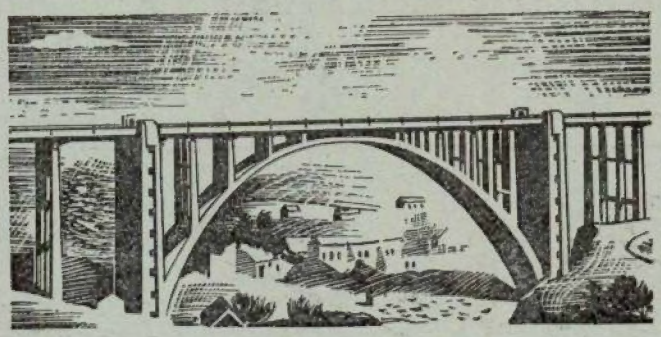
SÓ IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

DURAÇÃO ILIMITADA • HIGIÉNICOS
REVESTIDOS DE ISOLAMENTO ESPECIAL
FORNECIDOS COM SIFÃO DE SEGURANÇA
NÃO PARTEM A LOUÇA

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS
AO SERVIÇO DA
ENGENHARIA PORTUGUESA



GRANDE SORTIDO
DE INSTRUMENTOS DE
PRECISÃO, CIENTÍFICOS
E INDUSTRIAIS

RUA DAS PORTAS DE SANTO ANTÃO, 75
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

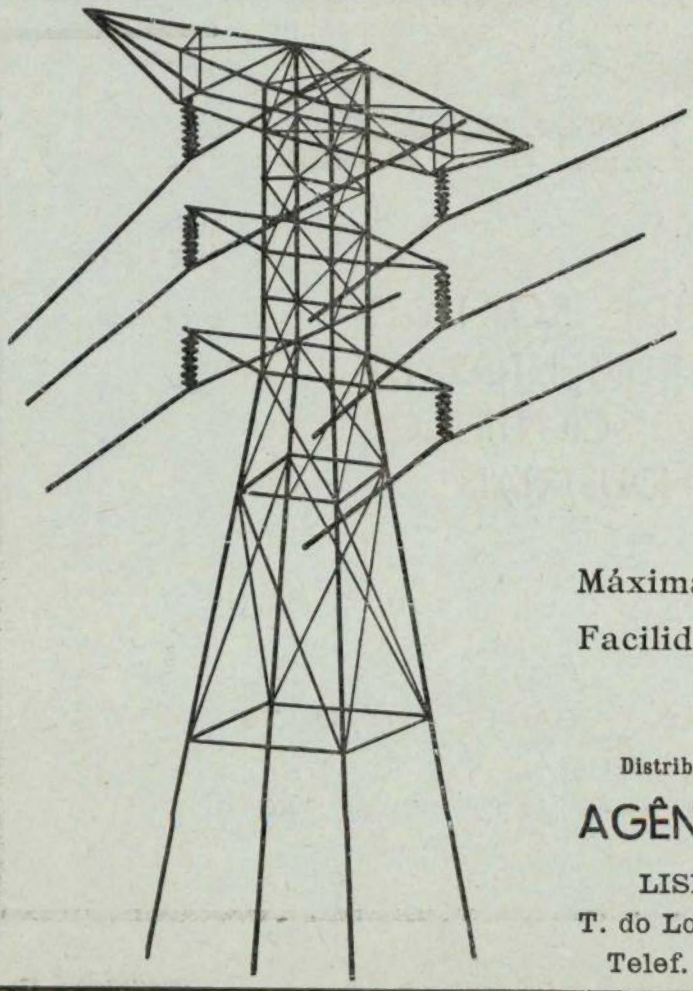
Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.º/Telef. 73 53 07/LISBOA 1



METALIZAÇÃO A FRIO

NEODON + ZINCO =
NEODONZINKGRUND

Máxima protecção
Facilidade de aplicação

Distribuidores exclusivos:

AGÊNCIA COMERCIAL, L.DA

LISBOA
T. do Loureiro, 3
Telef. 4 90 54

ÉVORA
R. da República, 93
Telef. 2 33 63

A sua máquina-ferramenta funcionará com

a velocidade de corte óptima

se utilizar

a regulação progressiva

obtida pela

transmissão *à distância*

HYDRO-TITAN

Accionamento de rodas de locomotiva, com transmissão HYDRO-TITAN de 35 CV comandada à distância

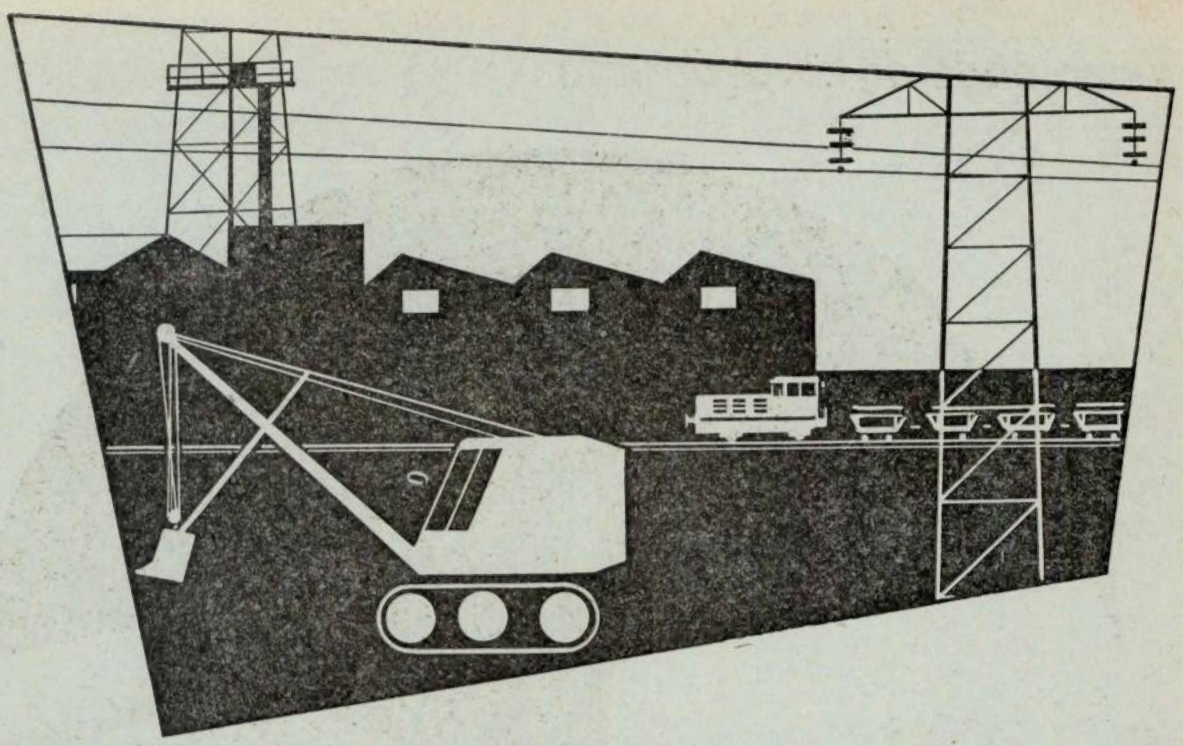
para fabricação de jantes

Velocidade à entrada: 1000 rot/min.
Velocidade à saída: 0–1000 rot/min.
Funcionamento de controle: 0–2,55 rot/min.
Funcionamento de trabalho: 80 rot/min.

DE ROLL

Klus, Suiça

Representantes em Portugal:
Socotel, L.da
Rua Sá da Bandeira, 651-4,º
Porto; Tel. 2 70 13



MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS. ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS · ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS LDA. — DIVISÃO MARÍTIMA E INDUSTRIAL

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO

Standard Electrica S.A.R.L.

Associada da

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORPORATION

DE NOVA YORK

TELECOMUNICAÇÕES

ELECTRÓNICA

AV. DA INDIA — LISBOA

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

✸

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✸

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 47812-50129
LISBOA

COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

PRODUTORA DE

FERRO GUSA

FERRO LIGAS

FERRO-MANGANÊS
SÍLICO-MANGANÊS
FERRO-SILÍCIOS
15 % - 25 % - 45 % - 75 % - 90 %

CARBONETO DE CÁLCIO
CIANAMIDA CÁLCICA
PASTA PARA ELÉCTRODOS

E EM MONTAGEM

GRAFITE

FÁBRICAS
CANAS DE SENHORIM
Telefone 6 72 22

SEDE
Largo de S. Carlos, 4 - 2.º — LISBOA
Telefones 32 53 43 - 3 55 56 - 36 89 89

Celulite

ISOLAMENTO TÉRMICO DAS CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS

*

TECTOS

*

PAREDES

*

CÂMARAS FRIGORÍFICAS

*

ISOLAMENTOS INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. ✦ RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º ✦ TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

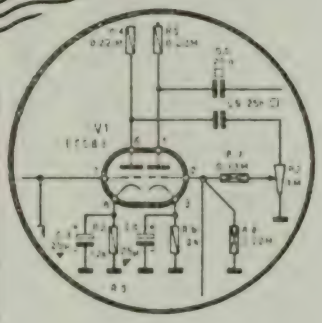
COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA

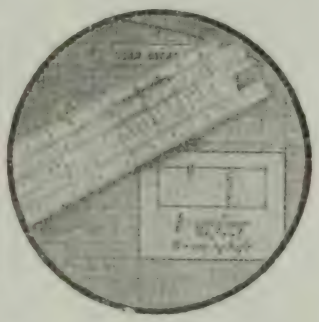
TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE SOM

BEM CONCEBIDO BEM CALCULADO CONSTRUIDO





LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

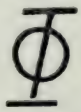
Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

AÇO TOR

O AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA
PARA BETÃO ARMADO COM
MAIOR VENDA NO MUNDO

TENSÃO DE SEGURANÇA 2 400 Kg/cm²
SEM GANCHOS

Especifique
AÇO TOR
com o símbolo



SOABAL – SOCIEDADE DE AÇOS PARA BETÃO ARMADO, LDA.
RUA JOAQUIM BONIFÁCIO, 2, 1.º — TELEF. 4 05 66 — LISBOA

TÉCNICA

CORPO REDATORIAL: J. M. VIEGAS GONÇALVES, A. ROMÃO DIAS, J. F. GOMES DE PINA, A. M. L. ESTEVES BRINCA

Ano XXXVIII — N.º 326 Março de 1963

C. D. U. 621.38/39.001

A evolução da Electrónica e das suas aplicações(*)

POR ANTÓNIO A. DE CARVALHO FERNANDES
PROF. DO I. S. T.

Definição

Num sentido restrito, a Electrónica é o campo da ciência e da engenharia que trata dos dispositivos electrónicos e da sua utilização. E por dispositivos electrónicos entendem-se aqueles em que tem lugar a condução por electrões através do vácuo, de um gás ou de um semicondutor.

Dispositivos electrónicos. Sua evolução

A condução por electrões pode dar-se no espaço livre, como por exemplo nas descargas atmosféricas, ou pode ocorrer em espaços limitados, como no caso das válvulas e de outros dispositivos electrónicos. A descoberta, a criação, o desenvolvimento e a produção industrial de dispositivos electrónicos nos últimos 60 anos estão na base da evolução da electrónica como ciência, como engenharia e como indústria.

Válvula electrónica de vácuo. Célula fotoeléctrica

Como marcos iniciais desta evolução, costumam considerar-se o díodo de Fleming (em 1904) e o tríodo de De Forest (em 1908) que tornaram possíveis a rectificação, a amplificação e a geração de sinais de alta frequência. Durante os 20 anos seguintes, a válvula electrónica de vácuo sofreu aperfeiçoamentos sucessivos e por 1928 apareceram os primeiros tétrodos e pêntodos.

As telecomunicações eram inicialmente o principal utilizador da electrónica. A introdução da célula fotoeléctrica (em 1923) e o desenvolvimento das válvulas electrónicas vieram, contudo, abrir novos campos de actividade para a electrónica nas aplicações domésticas (receptores radioeléctricos e gramofones eléctricos) e no cinema (que começou a ser sonoro em 1928).

Válvula para televisão

O tubo de raios catódicos de que havia modelos laboratoriais já em 1922 e o iconoscópio de Zworykin, em 1936, tornaram possível a televisão, bàsicamente como hoje é conhecida, ainda que beneficie agora de inúmeros aperfeiçoamentos, quer na captação de imagens, quer na sua transmissão e reprodução.

(*) Comunicação apresentada à Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa em 21 de Março de 1963.

Válvula de gás

As válvulas de gás com grelha de comando — que vieram a ser designadas por tiratrões — apareceram em 1929 e abriram o caminho para as aplicações da electrónica em comando industrial.

Magnetrão e Klistrão

Durante a última guerra, o aparecimento dos magnetrões e dos klistrões, e dos guias de onda associados, permitiu a realização do radar em micro-ondas com as inúmeras aplicações, nos campos militar e civil, que desde então têm vindo a desenvolver-se.

Semicondutores. Díodo de cristal e transistor

As recentes descobertas no campo dos semicondutores com um desenvolvimento extremamente rápido na produção de díodos de cristal e transistores tem vindo, nos últimos 10 anos, a revolucionar as aplicações da electrónica, quer permitindo novas versões de circuitos e equipamentos que utilizavam válvulas, quer abrindo novos campos ainda não explorados. O transistor de contacto pontual foi inventado em 1948. Os transistores de junção só apareceram depois, em 1951. Sendo um dispositivo amplificador, o transistor tem um campo muito largo de aplicações. Por ser extremamente pequeno e precisar de baixa quantidade de energia para o seu funcionamento, o transistor oferece vantagens evidentes na tendência para a redução progressiva das dimensões dos dispositivos e equipamentos electrónicos, a que se tem chamado miniaturização e, mesmo, microminiaturização. Presentemente, o desenvolvimento dos transistores processa-se no sentido de poderem trabalhar com frequências cada vez mais elevadas; transistores para frequências da ordem das dezenas de Mc/s são já de utilização corrente e prevê-se que não seja demorada a criação de tipos de transistores para trabalhar na região das centenas de Mc/s.

Criotrão

A utilização de temperaturas extremamente baixas para se conseguir a supercondutibilidade dos condutores veio abrir novas perspectivas à electrónica. O desaparecimento da resistência eléctrica para temperaturas abaixo da temperatura crítica e a destruição da supercondutibilidade por um campo magnético são os fenómenos em que se baseia o dispositivo denominado «Criotrão» que está ainda na fase de desenvolvimento e que funciona como um órgão de comutação extremamente rápido. É como se tratasse de um relé de muito alta velocidade, muito simples e de pequenas dimensões.

Maser. Laser. Electrónica quântica

Além dos dispositivos semicondutores referidos a propósito dos transistores e dos díodos de cristal, outros dispositivos estão a ser desenvolvidos para uso em amplificação e oscilação no domínio das micro-ondas. E vale a pena mencionar uma classe de amplificadores que usa semicondutores e permite ampliação de micro-ondas por radiação electromagnética estimulada. É o conhecido «Maser», palavra formada pelas letras iniciais de «Microwave Amplification by Stimulated Electromagnetic Radiation». Este dispositivo pode trabalhar apenas, por enquanto, em baixos níveis de potência, e, teòricamente, o rendimento e a largura de faixa não são grandes; às temperaturas muito baixas a que tem de trabalhar, a sua relação sinal/ruído é extremamente elevada o que os torna especialmente adequados em certos problemas de comunicações.

De entre os dispositivos «maser» há a distinguir os que trabalham em frequências ópticas e que têm a designação de «maser óptico» ou «laser», correspondendo esta última palavra às iniciais de «Light Amplification by Stimulated Electromagnetic Radiation». Dos diferentes tipos de dispositivos «laser» em que presentemente se trabalha, os que usam semicondutores parecem oferecer as

perspectivas de maior êxito. As aplicações futuras para os dispositivos «maser» e «laser» dependem da resolução de problemas secundários tais como aumentar a potência de saída, alargar a faixa de frequências de funcionamento, estabilizar a frequência e outros. Entretanto, as experiências já realizadas indicam claramente as enormes possibilidades destes dispositivos nos campos das telecomunicações, da radioastronomia, da medicina, da indústria, da fotografia e de outras actividades científicas. Note-se ainda que em virtude de o «maser» óptico e o «maser» de micro-ondas, serem estudados à luz da mecânica quântica, se começa agora a utilizar a expressão «Electrónica Quântica» para abranger aqueles dispositivos e sistemas associados.

Aplicações da Electrónica. Sua evolução

Simultâneamente com o progresso dos dispositivos electrónicos, a que nos referimos esquemàticamente, tem-se dado a evolução das aplicações da electrónica. Esta evolução tem tido lugar, quer em extensão, abrangendo cada vez maior número de campos de actividade, quer em profundidade, afectando cada vez mais ìntimamente as actividades que a utilizam; e a tal ponto que se ouve e se lê com frequência e expressão «era electrónica» aplicada ao século XX.

Seria impossível enumerar todas as aplicações presentes da electrónica, no pouco tempo de que dispomos. Vamos, contudo, fazer uma referência, ainda que sumária, às aplicações mais importantes, tendo especialmente em vista as tendências de evolução futura.

Telecomunicações

As telecomunicações têm sido, desde o início, o mais vasto campo de aplicação da electrónica, num desenvolvimento simultâneo pleno de entendimento e harmonia. Com efeito, é muitas vezes difícil saber se é a electrónica que, com o seu desenvolvimento, estimula a evolução da técnica das telecomunicações ou se são estas que provocam, com as suas necessidades e exigências, o progresso da electrónica.

Num sentido genérico, as telecomunicações abrangem a transmissão de informação de qualquer natureza, por sistemas electromagnéticos. Esta transmissão, para se efectuar nas condições de interesse prático, precisa da ajuda da electrónica que realiza, ao serviço das telecomunicações, as seguintes funções principais: 1) geração de sinais; 2) amplificação; 3) modulação e desmodulação. Apenas estas funções fundamentais, mas que se realizam numa faixa de frequências que vai desde zero até às dezenas de kMc/s e que estão na base de todos os sistemas de telecomunicações, quer por condutores, quer por ondas hertzianas; de todos os sistemas telegráficos e telefónicos, quer usem linhas aéreas, cabos subterrâneos, aéreos ou submarinos, equipamentos radioeléctricos de ondas longas, médias, curtas, ultracurtas ou de micro-ondas. Quer a propagação se faça por ondas electromagnéticas guiadas por condutores no espaço, ou por condutores em cabos ou por guias de onda; quer a propagação se faça por ondas hertzianas que se propagam ao longo da terra, ou que se propagam em linha de vista, ou se reflectem na ionosfera e na superfície terrestre, ou se propagam por dispersão troposférica ou ionosférica, ou que se reflectem em satélites naturais ou artificiais. Em todos estes sistemas de telecomunicações, a electrónica assegura os meios para gerar as ondas portadoras, realizar as operações necessárias de modulação e de amplificação nos sinais a transmitir e de amplificar e desmodular os sinais recebidos. Por vezes, ao longo do percurso das ondas portadoras, é preciso introduzir andares sucessivos de amplificação. É, por exemplo, o caso dos amplificadores instalados em cabos telefónicos submarinos. Noutros casos, é preciso receber e retransmitir os sinais em nova onda portadora, em perfeita analogia com as estações-relé da antiga mala-posta onde se fazia a muda dos cavalos. Mas com a diferença de que a estação-relé pode agora ser um satélite como o «Telstar».

Debrucemo-nos, por um momento, sobre estes dois exemplos. Os amplificadores submarinos, cuja alimentação de energia tem de ser feita pelo próprio cabo e a distâncias que podem ir até milhares de quilómetros; e que devem ter assegurada uma vida de algumas dezenas de anos; e que

precisam de resistir à pressão das grandes profundidades submarinas. As estações-relé em satélites artificiais apresentam também problemas do maior interesse; o seu consumo de energia deve ser mínimo e o fornecimento ser assegurado por pilhas solares; os receptores e as respectivas antenas devem ser de elevadíssima sensibilidade; a potência dos sinais transmitidos e a directividade das antenas de transmissão devem ser tais que os sinais cheguem à superfície terrestre com suficiente intensidade. Estes dois exemplos não foram escolhidos ao acaso; de facto, referem-se aos sistemas de telecomunicações transatlânticas cuja utilização deverá vir a intensificar-se no futuro. Os primeiros cabos telefónicos submarinos transatlânticos foram instalados em 1956; as comunicações por satélites estão ainda na fase experimental.

Além das operações fundamentais referidas, que a electrónica realiza ao serviço das telecomunicações, há uma outra que poderemos designar por comutação e que está na base do funcionamento das estações de comutação telefónica automática. Até há pouco tempo, a comutação telefónica era realizada exclusivamente por sistemas electromecânicos; há cerca de oito anos, começaram a ser usadas estações de comutação com sistemas mistos, electrónicos e electromecânicos; e só agora começam a instalar-se, ainda em regime experimental, as primeiras centrais inteiramente electrónicas, para serviço público. Em todos estes sistemas, a comutação telefónica automática permite seleccionar, por marcação directa, o assinante com que se deseja falar. Em palavras simples, o que sucede quando levantamos o microtelefone do descanso é o seguinte: um grupo de circuitos de comutação entra imediatamente em serviço, identifica a linha que chama e estabelece contacto com ela, dando-lhe o sinal de marcar; os impulsos do marcador são contados e registados; os circuitos de comutação determinam o destino da nossa chamada, analisam e ensaiam os diferentes percursos disponíveis, escolhem a solução mais conveniente, estabelecem a ligação terminal a terminal e fazem tocar o telefone do assinante desejado. Estas operações, que são já relativamente complicadas no âmbito de uma estação telefónica servindo uma certa área, tornam-se ainda mais complicadas quando são feitas através de várias estações em comunicações a longa distância. Um problema que se antevê particularmente complexo é o da marcação directa entre assinantes situados em continentes diferentes; e os sistemas de comutação telefónica do futuro, com as operações associadas, utilizarão estações que serão, na realidade, verdadeiros computadores electrónicos automáticos. De todos estes sistemas de telecomunicações telefónicas e telegráficas, haverá interesse em mencionar aqueles que se produzem industrialmente no nosso país: sistemas completos de comutação telefónica automática do tipo electromecânica mas já com alguns órgãos electrónicos; sistemas de comunicações radioeléctricas; e sistemas de telefonia em alta frequência para linhas de alta tensão.

Radiodifusão. Televisão

A radiodifusão e a televisão estão incluídas no âmbito geral das telecomunicações, tal como as definimos. Merecem, contudo, uma referência especial por constituirem as aplicações da electrónica mais evidentes para o grande público e por estarem na base de actividades industriais e económicas de grande envergadura. A evolução dos receptores de radiodifusão que passaram das volumosas caixas de há 30 anos, com enormes válvulas electrónicas, para os pequeníssimos receptores com os circuitos transistorizados de hoje, dá-nos, até certo ponto, uma ideia da evolução da electrónica. Os receptores de televisão são hoje equipamentos electrónicos complexos mas seguros; a mudança de válvulas para transistores começa a antever-se mas as dimensões globais já hoje são pràticamente condicionadas sòmente pela superfície de projecção do cinescópio.

Talvez valha a pena referir que as indústrias de fabricação de receptores de radiodifusão e de televisão estão já bastante desenvolvidas no nosso país.

Navegação aérea e marítima. Navegação espacial

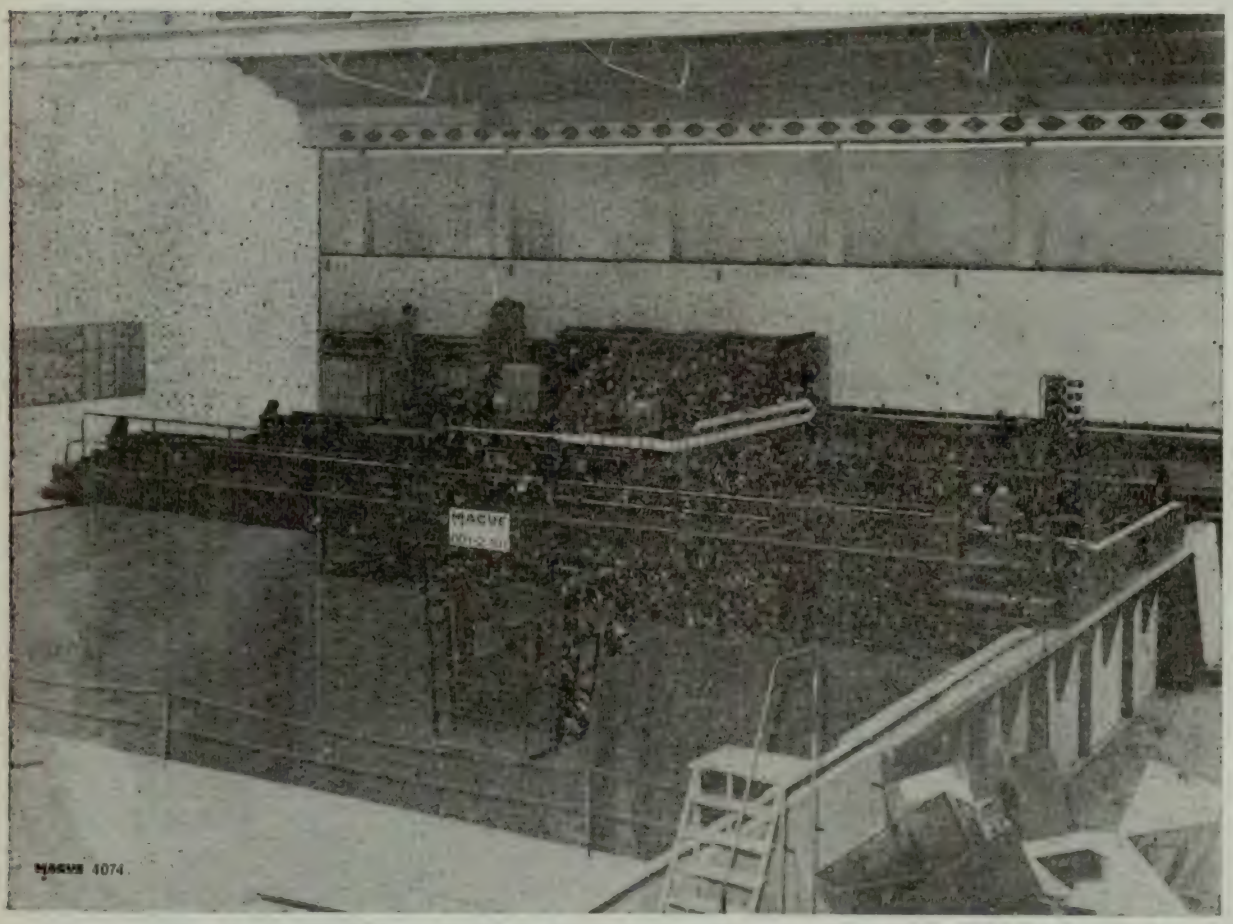
Também no sentido lato das telecomunicações, a que nos referimos, podem incluir-se os sistemas radioeléctricos usados em navegação aérea, marítima e espacial e que constituem aplicações

MAGUE

CONSTRUÇÕES METALO-MECÂNICAS MAGUE, L.DA

(S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA)

Alverca — Portugal



Ensaio de carga em fábrica de uma ponte rolante eléctrica de 80 t-2 × 10 t/16,2 m destinada à «Societé Europeenne pour le Traitement Chimique des Combustibles Irradiés» — Eurochemic — Mol — Bélgica

•

PROJECTO E FABRICO DE

PONTES ROLANTES
GUINDASTES
GRUAS. DERRICKS E GUINCHOS
APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS
CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS

ESFERA

PARA

ARMAZENAGEM

DE

AMONÍACO

AÇOS VAZADOS • FERROS FUNDIDOS
MECÂNICA MÉDIA E PESADA
CONSTRUÇÕES METÁLICAS

comportas
turbinas
condutas forçadas
reservatórios sob pressão
permutadores de calor

REDUTORES DE VELOCIDADE

DIVISÃO METALO-MECÂNICA

COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AV. 24 DE JULHO, 170 — LISBOA 2 — TELEFONES 67 04 21 E 67 20 61 — TELEGRAMAS: METALOFABRIL

altamente especializadas da electrónica. Trata-se de sistemas muito complexos e, apenas como ilustração, podemos referir os sistemas automáticos de aterragem, que se espera venham a constituir um processo seguro, em quaisquer condições de tempo.

Do ponto de vista industrial, já hoje se fabricam correntemente no nosso país alguns equipamentos radioeléctricos, para instalação terrestre, de radio-ajudas à navegação aérea.

Nos sistemas de navegação espacial, os problemas complicam-se notàvelmente em relação à navegação aérea e marítima. Com efeito, é preciso que a nave chegue ao destino desejado no momento preciso para, com a velocidade conveniente — no sentido vectorial —, realizar o contacto com o alvo. Pode dizer-se que os elementos básicos para constituir sistemas automáticos de navegação espacial já hoje existem, mas que é ainda necessário um trabalho considerável de investigação e desenvolvimento para se conseguirem sistemas inteiramente adequados e razoàvelmente seguros.

Radioastronomia

A radioastronomia com os seus radiotelescópios e com outra instrumentação utiliza também as aplicações da electrónica a tal ponto que nalgumas Universidades existe uma ligação muito estreita entre os departamentos de electrónica e de radioastronomia.

Electrónica na Meteorologia

Também a meteorologia utiliza as aplicações da electrónica e a nossa indústria há muitos anos que fabrica radiossondas e emissores de radiovento.

Aplicações da Electrónica na Ciência Nuclear

A reacção em cadeia que tem lugar num reactor nuclear tem de ser comandada com precisão. Circuitos electrónicos representam um papel muito importante nesse sistema de comando, bem como nos dispositivos de medida e de segurança. As aplicações da electrónica na variadíssima aparelhagem hoje disponível para detecção de radiação nuclear são bem conhecidas dos especialistas nessa matéria.

Electrónica na Medicina

As aplicações da electrónica na medicina e na biologia estão abrangidas na chamada «Electrónica Biomédica»; o seu desenvolvimento deve-se a uma cooperação estreita entre biologistas, médicos, físicos e engenheiros que se têm ajudado mùtuamente. Os engenheiros e os físicos precisam compreender e ter na devida consideração os organismos vivos nas suas diferentes fases desde as células unitárias à complexidade maravilhosa do ser humano. Por outro lado, os médicos e os biologistas ganham em entender os princípios básicos e as possibilidades práticas da electrónica para que possam tirar desses conhecimentos todo o partido possível quanto à instrumentação e às técnicas que a electrónica pode pôr à disposição da biologia e da medicina. A lista dos instrumentos que a electrónica médica põe à disposição da investigação é muito grande. Computadores electrónicos que simulam memória e inteligência, electroencefalógrafos que medem as características eléctricas do sistema nervoso central, electrocardiógrafos que, juntamente com os balistocardiógrafos, medem o comportamento do coração são exemplos nítidos de instrumentos que estão a ser aplicados com vista a uma compreensão quantitativa do funcionamento do organismo humano.

Electrónica na Instrumentação

A electrónica tem tido uma contribuição notável na evolução da instrumentação em geral. Com efeito, muitos instrumentos novos e os respectivos métodos de medida baseados em dispositivos electrónicos têm sido concebidos e utilizados nos últimos 20 anos. Citando apenas medidas fora do

domínio da electrotecnia, podemos referir medidas de luz, de som, de temperatura, de pressão, de velocidade e de aceleração, que podem ser feitas por instrumentos com base em dispositivos electrónicos.

Sistemas electrónicos de comando

A Engenharia dos Sistemas de Comando tem as suas fundações na teoria da realimentação e na análise dos sistemas lineares; utiliza conceitos fundamentais da teoria da comunicação, da mecânica não-linear e das teorias modernas da estatística; mas tem nos dispositivos electrónicos os meios físicos para assegurar a realização dos princípios e dos conceitos do comando automático.

Das realizações hoje conseguidas neste domínio podemos salientar a automação industrial e os complexos sistemas militares ligados ao comando de mísseis e de satélites onde a electrónica tem um papel preponderante.

Electrónica Industrial

O termo Electrónica Industrial costuma abranger as aplicações da electrónica no comando e funcionamento de máquinas usadas na indústria e inclui, por exemplo: relés fotoeléctricos, rectificadores de vapor de mercúrio para carga de baterias, sinalização para caminhos de ferro, rectificadores de alta tensão, comando de motores, e aquecimento por alta frequência de condutores e dieléctricos. Estas aplicações da electrónica têm-se desenvolvido extraordinàriamente nos últimos 20 anos à medida que novos dispositivos electrónicos vão estando disponíveis e que as máquinas industriais se aperfeiçoam com a adaptação de dispositivos electrónicos no seu funcionamento e no seu comando, muitas vezes, completamente automático.

Computadores electrónicos automáticos

Como se sabe, um computador automático é essencialmente um conjunto de unidades projectadas para reconhecer informação fornecida na entrada do computador, armazenar informação, realizar operações aritméticas ou outras, formar sequências finitas dessas operações sob comando apropriado e fornecer os resultados da computação na saída do computador. O primeiro grande computador automático era electromecânico (isto é, usava dispositivos electromecânicos como elementos fundamentais) e foi posto a trabalhar com perfeita regularidade em Abril de 1944 na Universidade de Harvard, em Cambridge. Pode dizer-se que esse computador conseguiu então revolucionar notàvelmente o cálculo de tabelas matemáticas. No princípio de 1946, outro computador, mas já electrónico, pois que usava 18.000 válvulas electrónicas e que veio a ser conhecido por ENIAC — iniciais de «Electronic Numerical Integrator and Computer» — foi posto a funcionar na Universidade de Pensilvânia, em Filadélfia, e tinha como objectivo principal a computação de tabelas de balística. Dizia-se que esse computador podia calcular a trajectória de um projéctil em menos tempo do que o necessário para o projéctil atingir o objectivo.

De então para cá, os computadores automáticos progrediram, com extrema rapidez, quer no que se refere aos elementos de computação e de memória que os constituem, quer relativamente à velocidade com que são realizadas as operações de computação. De relés e interruptores rotativos passou-se a válvulas electrónicas e a dispositivos semicondutores; de memória electromecânica e em tubos de raios catódicos mudou-se para sistemas magnéticos de tambor, de fita ou de núcleos; de velocidades de entrada-saída de dez ou vinte caracteres por segundo, evoluiu-se para velocidades mil vezes superiores; e de velocidades de computação de algumas operações por segundo, passou-se para dezenas de milhar de operações por segundo. Simultâneamente, a programação matemática necessária para a computação evoluiu também de modo a poder-se tirar maior partido das possibilidades oferecidas pelos computadores. Hoje, a utilização de computadores é universal e faz-se em variados campos, desde os mais complicados cálculos científicos, até os mais fastidiosos processos de contabilidade.

Aplicações militares da Electrónica

Uma das aplicações mais importantes da Electrónica na arte militar é o Radar a que a última guerra deu uma grande publicidade. Os princípios fundamentais do radar são muito simples: 1) a radiação electromagnética em muito altas frequências pode servir para detectar e localizar objectos reflectores situados a distância; 2) a radiação é emitida sob a forma de impulsos com a duração de alguns microsegundos, separados por intervalos de silêncio francamente maiores; 3) os impulsos devolvidos pelo objecto reflector são recebidos e representados em equipamento localizado no ponto da transmissão; 4) a distância é determinada pela medida do tempo de percurso dos impulsos do emissor ao alvo e novamente ao ponto de partida; e 5) a direcção é determinada pelo uso de antenas altamente direccionais. Embora estes princípios se baseiem nas leis fundamentais do electromagnetismo, foi só depois de terem sido criados os magnetrões e os klistrões e ter sido desenvolvida a técnica dos guias de onda que foi possível, nos primeiros anos da última guerra, construir os sistemas práticos de radar que iriam desempenhar papel tão importante. São também os programas militares dos grandes países que têm permitido a atribuição de enormes verbas à investigação e ao desenvolvimento dos sistemas electrónicos usados em mísseis e em satélites e que se espera venham a ter grande influência, não só nos problemas militares, como ainda nas aplicações civis. Esses sistemas dizem respeito a três funções principais: guiamento, comando, e comunicações, que têm de ser realizadas com elevada precisão e completa segurança.

O equipamento electrónico incluído num míssil ou num satélite é um sistema extremamente complexo, miniaturizado ao extremo, e com a robustez mecânica suficiente para poder resistir às condições extremamente severas a que é submetido. Ainda no que se refere às aplicações da electrónica na arte militar, há que mencionar os computadores electrónicos, usados em grande profusão, desde as unidades altamente especializadas instaladas a bordo de naves espaciais, de aviões e de navios, até os computadores em grande escala que estão associados aos complexos sistemas globais de defesa.

Continuando a referir-nos às actividades industriais em Portugal, devemos mencionar que se está presentemente a produzir equipamento electrónico para o sistema de lançamento de um míssil avião-avião, para vários países da Europa. A nossa indústria tem assim a oportunidade de participar num programa de produção coordenada na Europa de um sistema militar complexo e é de interesse notar que a parte da produção atribuída a Portugal foi justamente no domínio da electrónica.

SUMÁRIO

A evolução dos dispositivos electrónicos fundamentais é apresentada com generalidade, dando se atenção especial aos semicondutores e à electrónica quântica. Passam-se em revista as aplicações da electrónica nas telecomunicações e noutros domínios. Faz-se referência às actividades industriais nos vários campos de aplicação da electrónica.

SUMMARY

The evolution of the fundamental electronic devices is reviewed from both the scientific and the industrial standpoints, special emphasis being given to semi-conductors and quantum electronics. The application of electronics in telecommunications and other fields is also reviewed with a special reference to industrial activities in Portugal.

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 °/₀ dos totais do País.*

I — Breve nota mensal

No aspecto hidrológico, o mês de Fevereiro apresentou-se, no conjunto, muito acima da média. Efectuou-se uma exportação para Espanha de excedentes de energia da rede portuguesa. A importação foi devida a um trânsito de energia através da rede portuguesa, de Lindoso a Saucelle, efectuada a pedido da UNESA, por motivo de limitações de transporte na rede espanhola.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1962	1963	Variação °/₀
Produção hidráulica (P_h) . . .	303,0	361,0	+ 19
Produção térmica (P_t)	0,0	0,0	0
Produção total (P_T)	303,0	361,0	+ 19
Exportações (Ex)	0,0	15,5	—
Importações (I)	0,0	0,1	—
Produção para consumos não perman. (P_{cnp})	60,8	70,4	+ 16
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	242,2	275,2	+13,6 (2)
Coeficiente de hidraulicidade	0,64	1,69	—

b) Acumulados desde 1 de Janeiro

	1962	1963	Variação °/₀
Produção hidráulica (P_h) . . .	625,3	736,9	+ 18
Produção térmica (P_t)	0,0	5,8	—
Produção total (P_T)	625,3	742,7	+ 19
Exportações (Ex)	0,0	32,3	—
Importações (I)	0,0	0,1	—
Produção para consumo não perman. (P_{cnp})	121,1	130,1	+ 7
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	504,2	580,4	+15,1 (2)
Coeficiente de hidraulicidade	1,10	1,64	—

NOTAS:

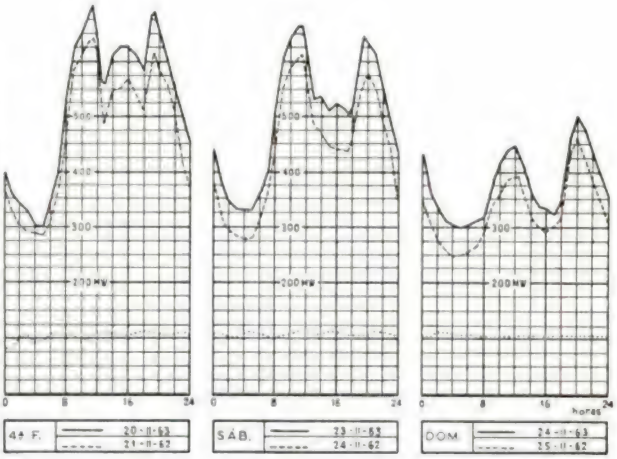
(1) A produção para consumos permanentes (P_{CP}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{CP} = P_T - P_{cnp} + 1 - E_x$

(2) O aumento percentual de produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 13,7 °/₀.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1962	4.ª feira: 1963
Produção hidráulica		(P_h) MWh	11563	12934
Produção térmica		(P_t) MWh	0	0
Produção total		(P_T) MWh	11563	12934
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	0	0
	Import.	(I) MWh	0	0
TOTAL		$P_T + (I - E_x)$ MWh	11563	12934
Prod. para cons. perm.		(P_{cp}) MWh	9514	10527
Prod. para cons. não perm.		(P_{cnp}) MWh	2049	2407
Características dos diagramas	$P_T + (I - E_x)$	Potência máx. MW	642,0	700
		Potência mín. MW	283,5	301
		Utiliz. da ponta horas	18,0	18,5
		Factor de carga	0,75	0,77
	P_{cp}	Potência máx. MW	552	589
		Potência mín. MW	195	204
		Utiliz. da ponta horas	17,2	17,9
		Factor de carga	0,72	0,74

FEVEREIRO



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês: GWh	No fim do mês: °/₀ (1)
Paradela	217,2	97,6
Venda Nova	123,0	96,1
Salamonde	25,0	90,6
Caniçada	31,3	94,6
Cabril	305,0	89,9
Castelo do Bode	148,8	91,3
Guilhofrei	8,1	97,6
Lagoa Comprida	29,7 (2)	91,8
Santa Luzia	61,6	100,0
Pracana	12,9	100,0
Póvoa	12,9 (3)	98,1
Total . . .	975,5	93,5

Notas:

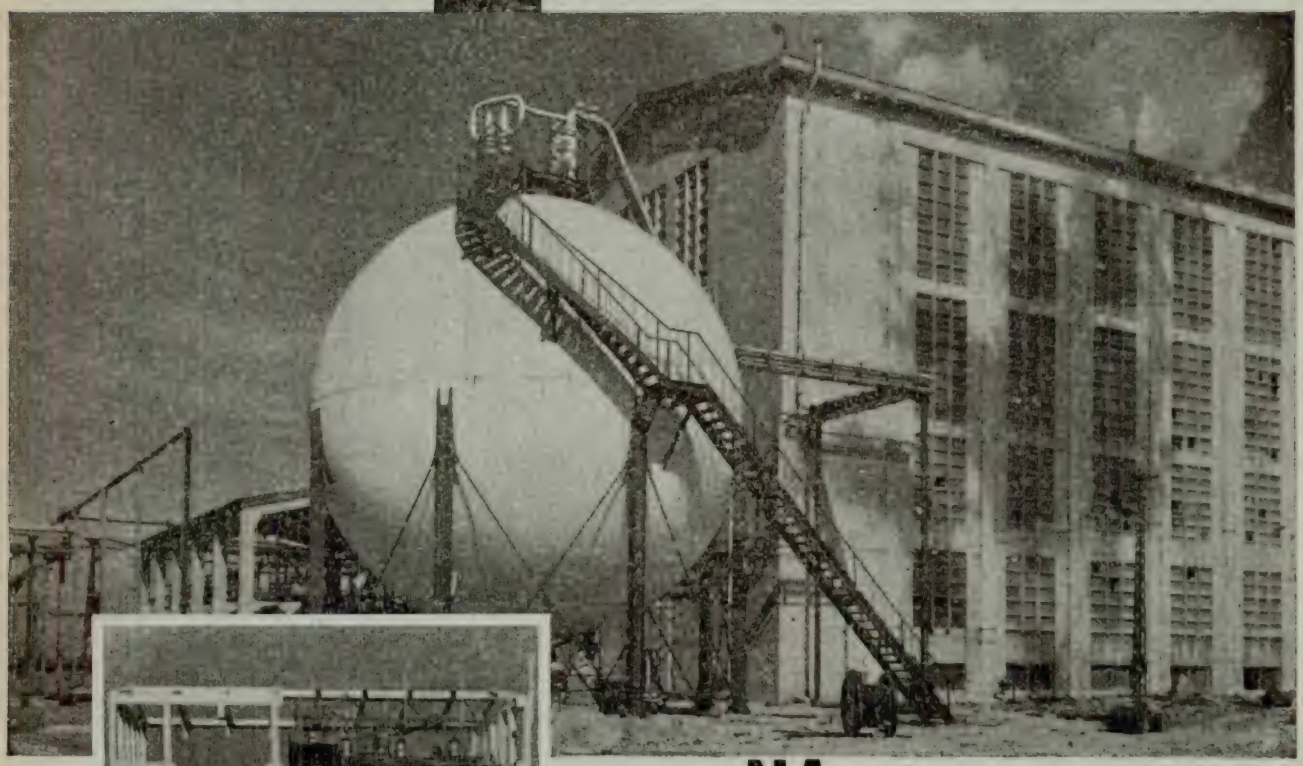
(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 2,7 GWh armazenados em Vale do Rossim no fim do mês.

(3) Inclui 2,7 GWh armazenados no açude do Poio no fim do mês.

CENTRO DE PROJECTOS

COLOCA A SUA EXPERIÊNCIA AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA NACIONAL



FÁBRICA EM REMODELAÇÃO

MAQUETE DA FÁBRICA REMODELADA

NA REMODELAÇÃO DE INSTALAÇÕES

O CENTRO DE PROJECTOS CUF ESTÁ EM POSIÇÃO DE TOMAR A SEU CARGO

O ESTUDO ECONÓMICO DE INSTALAÇÕES EXISTENTES

PROPÔR AS REMODELAÇÕES NECESSÁRIAS AO AUMENTO DA RENTABILIDADE

PROJECTAR ESSAS REMODELAÇÕES, QUER FORNECENDO O PROJECTO, QUER ENCARREGANDO-SE DA AQUISIÇÃO DO MATERIAL E DA EXECUÇÃO DA RESPECTIVA MONTAGEM

O CONJUNTO DE TÉCNICOS DE QUE DISPÕE, O APOIO DA LONGA EXPERIÊNCIA INDUSTRIAL DA COMPANHIA UNIÃO FABRIL NOS VÁRIOS RAMOS DA INDÚSTRIA E AINDA A COLABORAÇÃO COM FIRMAS ESTRANGEIRAS GARANTEM A QUALIDADE DAS REALIZAÇÕES QUE LHE FOREM ENTREGUES

EXPONHA OS SEUS PROBLEMAS E DIRIJA AS SUAS CONSULTAS A **CENTRO DE PROJECTOS CUF** AV. 24 DE JULHO, 170 TELEF. 67 20 61 LISBOA - PORTUGAL TELEG. PROFABRIL

CP-2

DESPOEIRAGEM

FILTROS TECIDOS EM PEÇAS, PANOS, SACOS, MANGAS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 93
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FLUIDO E MASTIC

IMPERMEABILIZAÇÕES

TORNA TUDO ESTANQUE

Impermeabilização e vedação perfeita de:

Terraços, Empenas, Algerozes, Clarabóias, Paredes húmidas, Coberturas, Fendas, Juntas de dilatação, etc., etc.

Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX **À base de borracha + alumínio**

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão

RUBIO E ROOFATEX dois produtos que se completam

Representante exclusivo: Orlando Fernandes

Rua Palmira, 46-A-B-C — LISBOA-1 — Telefs. 83 01 63 - 84 26 39 — End. teleg. «ORFER»

C. D. U. 621.313.013.001

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS ANALOGIAS ELÉCTRICAS AO ESTUDO DE ALGUNS PROBLEMAS RELATIVOS AO CAMPO MAGNÉTICO DAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS (*)

PELO ENG.º ELECT. (I.S.T.) CARLOS DE MEDEIROS PORTELA
Assistente do I. S. T.

INTRODUÇÃO

Para os tipos mais correntes de máquinas eléctricas, a teoria já elaborada permite, sob diversas formas, ter em conta o seu comportamento global uma vez conhecido o comportamento local. Assim, por exemplo para os alternadores, o tratamento de Doherty e Nickle (1) quase se pode classificar de exaustivo na hipótese de se admitir a aditividade do campo magnético.

A expansão dos tratamentos mais rigorosos tem sido contrariada, porém, pela dificuldade de um conhecimento local do campo magnético com relativa rapidez e rigor. Para esse estudo local recorre-se na maior parte dos casos a métodos gráficos. Este processo de obtenção de campos tem como óbice grave a sua excessiva morosidade naqueles casos em que a configuração geométrica seja complexa ou em que se deva ter em conta a saturação Por este motivo, o estudo local dos campos é, na fase de projecto das máquinas, quanto possível evitado, só se efectuando quando exigências construtivas o tornem imprescindível.

Na ausência de um conhecimento rigoroso do comportamento local das máquinas, sucede também que os tratamentos globais mais exactos, mas que têm em conta esse comportamento de forma pouco aproximada, conduzem a resultados não muito mais próximos da realidade que outros métodos bastante mais simples.

Parece assim do maior interesse aprofundar o estudo do comportamento local das máquinas eléctricas no que respeita ao campo electromagnético.

O método das analogias eléctricas, largamente utilizado no estudo de campos vectoriais, pareceu-nos indicado. Não encontrámos, porém, qualquer método relativamente geral para a sua aplicação àqueles casos em que os parâmetros que, no campo de vectores, caracterizam o meio (2), dependem do valor local desses vectores. Tal é o caso do ferro com saturação. Ora um método que não permita ter em conta, de maneira satisfatória, a saturação do ferro, não permite resolver a generalidade dos problemas relativos ao estudo local do campo electromagnético. Procurámos, para o estudo de campos com as características referidas, um método de aproximações sucessivas, baseado num campo eléctrico análogo, quanto possível ràpidamente convergente.

Que seja do nosso conhecimento, o problema foi estudado por Poristky e, na sua aplicação a um caso particular, por Liebmann, que utilizou um método interessante e, nesse caso, ràpidamente convergente. No entanto, para outros campos, em particular para alguns do tipo que nos interessava estudar, a distribuição de condutividade obtida pela aplicação do método de Liebmann, afasta-se bastante da real.

---

(1) Referências bibliográficas n.os [10] e [25].
(2) Como, por exemplo, a permeabilidade magnética.
(*) Dissertação apresentada para efeitos de doutoramento.

Estabelecemos um método relativamente geral para o estudo de campos vectoriais em que os parâmetros característicos do meio dependem do valor local desses vectores, e que, na generalidade dos casos, desde que criteriosamente aplicado, é ràpidamente convergente, mesmo para campos correspondentes a uma forte saturação. Expomo-lo na hipótese de campos bidimensionais, mas, semelhantemente a outros métodos de estudo de campos deste tipo, é generalizável ao estudo de campos redutíveis a duas dimensões. É o caso dos campos de simetria cilíndrica e dos campos em camadas de espessura não uniforme, mas pequena à escala que interesse considerar. É também generalizável fàcilmente a campos a três dimensões, com a única dificuldade de ser menos cómodo trabalhar com redes de condutores a três dimensões.

Aplicámos este método ao estudo de alguns problemas relativos ao campo magnético das máquinas eléctricas, e especialmente aos seguintes:

1.º) Cálculo da relutância magnética do conjunto entreferro, dentes e cavas das máquinas eléctricas, e cálculo das perdas magnéticas nos dentes;
2.º) Cálculo do campo magnético das máquinas eléctricas com o fim de determinar com relativo rigor o seu comportamento em regime permanente e perturbado.

Formalmente este trabalho está dividido em três capítulos:

No primeiro analisamos o método das analogias eléctricas e a sua aplicação ao estudo de um campo vectorial em que a relação entre os dois vectores que o caracterizam depende do valor local desses vectores.

No segundo capítulo analisamos a aplicação do método ao estudo do campo magnético no entreferro, dentes e cavas das máquinas eléctricas, com vista à determinação da relutância magnética e das perdas magnéticas. Apresentam-se, além disso, os resultados obtidos com uma série sistemática de ensaios feitos para diversos configurações geométricas dos dentes e cavas.

No terceiro capítulo analisamos a aplicação do método ao estudo do campo magnético das máquinas eléctricas, com vista à determinação, com relativo rigor, do seu comportamento em regime permanente e transitório. Apresentamos alguns resultados experimentais, obtidos em ensaios que efectuámos, fundamentalmente, para concretizar os métodos expostos e analisar a sua viabilidade.

Os três capítulos deste trabalho não devem, no entanto, ser considerados distintos.

A parte experimental deste trabalho foi efectuada, na quase totalidade, no Instituto Superior, Técnico, e, em parte, no Laboratoire de Calcul Experimental Analogique de l'Institut Blaise Pascal.

CAPÍTULO I

Método das analogias eléctricas
Sua aplicação ao estudo de um campo vectorial em que a relação entre os dois vectores que o caracterizam depende do valor local desses vectores

1 Condições de analogia entre campos vectoriais

1.0 *Introdução. Condições de analogia entre conjuntos de variáveis*

Consideremos um conjunto de variáveis $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_p$ e coordenadas $x_{i'}$ definidoras do espaço e do tempo. Suponhamos que estas variáveis satisfazem a um conjunto de relações

$$1) \quad \begin{cases} f_1 (x_1, \ldots, x_{i'}, \ldots, x_{p'}, X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_p) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_k (x_1, \ldots, x_{i'}, \ldots, x_{p'}, X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_p) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_q (x_1, \ldots, x_{i'}, \ldots, x_{p'}, X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_p) = 0 , \end{cases}$$

que defina unìvocamente as variáveis

$$2) \quad X_i = X_i (x_1, \ldots, x_{i'}, \ldots, x_{p'}) .$$

Representa-se por f uma relação qualquer entre as variáveis, suas derivadas e integrais, de umas em relação às outras, pressupondo-se que as relações impostas englobam quaisquer eventuais condições iniciais, aos limites, ou outras, susceptíveis de assegurar a unicidade da solução.

Considere-se, um conjunto de variáveis $X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X'_r$, e coordenadas $x'_{l'}$, satisfazendo a um conjunto de relações

$$3) \quad \begin{cases} f'_1 (x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}, X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X'_r) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f'_l (x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}, X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X'_r) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f'_s (x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}, X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X'_r) = 0 , \end{cases}$$

que defina unìvocamente as variáveis

$$4) \quad X'_l = X'_l (x'_1, \ldots, x'_l, \ldots, x'_{r'}) .$$

Se as equações (3), se puderem por sob a forma equivalente

$$5) \quad \begin{cases} f_1 (f^0_1, \ldots, f^0_{i'}, \ldots, f^0_{p'}, F^0_1, \ldots, F^0_i, \ldots, F^0_p) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_k (f^0_1, \ldots, f^0_{i'}, \ldots, f^0_{p'}, F^0_1, \ldots, F^0_i, \ldots, F^0_p) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_q (f^0_1, \ldots, f^0_i, \ldots, f^0_{p'}, F^0_1, \ldots, F^0_i, \ldots, F^0_p) = 0 , \end{cases}$$

sendo

$$6) \quad f^0_{i'} = f^0_{i'} (x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'})$$

$$7) \quad F^0_i = F^0_i (x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}, X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X'_r) ,$$

ter-se-á

$$8)\quad \begin{cases} x_1 = f_1^0\,(x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}) \\ \qquad\cdots \\ x_{l'} = f_{l'}^0\,(x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_r) \\ \qquad\cdots \\ x_{p'} = f_{p'}^0\,(x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}) \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} X_1 = F_1^0\,(x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}, X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X_r) \\ \qquad\cdots \\ X_i = F_i^0\,(x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}, X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X'_r) \\ \qquad\cdots \\ X_p = F_p^0\,(x'_1, \ldots, x'_{l'}, \ldots, x'_{r'}, X'_1, \ldots, X'_l, \ldots, X'_r)\,. \end{cases}$$

Se se determinar o conjunto de variáveis X'_l sob a forma (4), as relações (8) e (9) permitem exprimir variáveis X_i sob a forma (2).

A dificuldade de determinação das condições de analogia reside, por um lado, em obter conjuntos de relações entre as variáveis que assegurem a unicidade das soluções, e, por outro lado, na transformação do conjunto de relações (3) no conjunto de relações (5).

Satisfeitas as condições referidas, o estudo de um fenómeno físico traduzido pelo conjunto de variáveis X_i e coordenadas $x_{i'}$ pode ser feito recorrendo a um fenómeno físico traduzido pelo conjunto de variáveis X'_l e coordenadas $x'_{l'}$. Uma vez determinado este último tem-se, por transformação de variáveis, definido o primeiro.

Seguidamente analisamos alguns casos de analogia mais directamente relacionados com o que nos interessa estudar. Supõe-se que as funções que se consideram satisfazem às condições de continuidade e derivabilidade necessárias, e tendem para zero com rapidez suficiente para pontos suficientemente afastados do domínio em estudo, por forma a serem válidos os raciocínios efectuados. Dispensamo-nos de, em cada caso, explicitar essas condições.

1.1 *Meios isótropos. Analogia directa*

Seja um campo vectorial caracterizado por dois vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ (1) e em que, por exemplo, sejam impostas em todo o espaço as seguintes condições (2):

$$10)\quad \operatorname{div} \mathbf{X} = F_1$$
$$11)\quad \operatorname{rot} \mathbf{Y} = \mathbf{F}_2$$
$$12)\quad \mathbf{X} = \beta\,\mathbf{Y} + \mathbf{F}_3$$
$$13)\quad \beta\,Y = f\,(Y)\,,$$

sendo: F_1, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ funções de ponto arbitradas; β um escalar finito ou só positivo ou só negativo; e f função contínua, biunívoca e crescente se β for positivo, e decrescente se β for negativo, em cada ponto do espaço, mas eventualmente diferente de ponto para ponto.

Sejam $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{Y}_1$; $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{Y}_2$ duas soluções desse campo vectorial. Tem-se, supondo β positivo:

$$14)\quad (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\,,\ \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) \geqslant (|\,\mathbf{X}_1 - \mathbf{F}_3\,| - |\,\mathbf{X}_2 - \mathbf{F}_3\,|)\ (Y_1 - Y_2) \geqslant 0,$$

---

(1) Representamos por $\mathbf{Z}$ um vector genérico e por Z ou $|\,\mathbf{Z}\,|$ o seu módulo ($\mathbf{Z} = \mathbf{X}\,;\ \mathbf{Y}\,; \ldots$).

(2) Como se disse em 1.0, supõe-se que as funções que se consideram satisfazem às condições de continuidade e derivabilidade necessárias e que tendem para zero com rapidez suficiente para pontos suficientemente afastados do domínio em estudo, por forma a serem válidos os raciocínios efectuados.

verificando-se simultâneamente as duas igualdades se e só se

15) $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$
16) $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2$.

Se β for negativo dever-se-á, em (14), multiplicar o segundo termo por -1 e, em vez do sinal $\geqslant$ considerar o sinal $\leqslant$, sendo idênticas as condições de igualdade.

Por outro lado, é

17) $\operatorname{div} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = 0$
18) $\operatorname{rot} (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) = 0$.

Segue-se que

19) $\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 = \operatorname{grad} V$,

sendo V definido a menos de uma constante aditiva. Suponhamos que essa constante é escolhida por forma que o valor de V num ponto infinitamente afastado é zero.

Tem-se

20) $\operatorname{div} [V (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)] = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)$.

Integrando ambos os membros desta igualdade no volume v delimitado por exemplo por uma esfera de raio r e superfície S (de normal exterior $\mathbf{n}$), tem-se

21) $$\int_v (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)\, dv = \int_v \operatorname{div} [V (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)]\, dv = \int_S V (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \mathbf{n})\, dS$$

Se

$$\lim_{r \to \infty} V (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \mathbf{n})$$

for um infinitésimo de ordem suficientemente elevada, tem-se que

22) $$\int (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2)\, dv = 0,$$

sendo o integral estendido a todo o espaço.

Portanto, também em todo o espaço, verificar-se-ão as equações (15) e (16) e as duas soluções coincidem.

Se as condições (10), (11), (12) e (13) se verificarem num determinado domínio e na fronteira desse domínio forem impostas condições adequadas, suficientes para definir o campo vectorial, verificar-se-á também a unicidade da solução.

As condições indicadas referem-se apenas à unicidade da solução, na medida em que essas condições sejam válidas, e não à estabilidade de um sistema físico que lhe corresponda.

Sejam, em domínios do espaço de configuração análoga, dois campos vectoriais, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$, satisfazendo $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ às condições (10), (11), (12) e (13) e $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$ às condições

23) $\operatorname{div} \mathbf{X}' = F'_1$
24) $\operatorname{rot} \mathbf{Y}' = F'_2$
25) $\mathbf{X}' = \beta' \mathbf{Y}' + \mathbf{F}'_3$
26) $\beta' Y' = f' (Y')$,

sendo, em pontos correspondentes dos dois domínios,

$$27)\quad F'_1 = K_1 F_1$$
$$28)\quad \mathbf{F}'_2 = K_2 \mathbf{F}_2$$
$$29)\quad \mathbf{F}'_3 = K_1 \mathbf{F}_3$$
$$30)\quad f'(Y') = K_1 f\left(\frac{Y'}{K_2}\right),$$

sendo K_1 e K_2 constantes.

Se, além disso, os dois campos satisfizerem nas fronteiras desses domínios a condições análogas e suficientes para os definir unìvocamente, ter-se-á, em pontos correspondentes desses domínios,

$$31)\quad \mathbf{X}' = K_1 \mathbf{X}$$
$$32)\quad \mathbf{Y}' = K_2 \mathbf{Y}.$$

Há, assim, analogia formal entre os dois campos vectoriais.

1.2 *Meios anisótropos. Analogia directa*

A condição de analogia indicada em 1.1 é bastante geral, mas aplicável apenas a meios isótropos (1), embora eventualmente heterogéneos.

Consideremos um meio anisótropo, caracterizado por dois vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, satisfazendo em todo o espaço às condições

$$33)\quad \operatorname{div} \mathbf{X} = F_1$$
$$34)\quad \operatorname{rot} \mathbf{Y} = \mathbf{F}_2$$
$$35)\quad \mathbf{X} = (\bar{\beta}, \mathbf{Y}) + \mathbf{F}_3,$$

sendo F_1, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ funções de ponto arbitradas e $\bar{\beta}$ (2) um tensor de segunda ordem.

Suponhamos que, num sistema de eixos ortogonais, x, y, z, eventualmente diferente de ponto para ponto, (35) se pode pôr sob a forma

$$36)\quad X_x = f_x(Y_x) + F_{3x}$$
$$37)\quad X_y = f_y(Y_y) + F_{3y}$$
$$38)\quad X_z = f_z(Y_z) + F_{3z},$$

sendo f_x, f_y e f_z funções contínuas, biunívocas e monotónicas em cada ponto do espaço, mas eventualmente diferentes de ponto para ponto, as três crescentes ou as três decrescentes.

Sejam $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{Y}_1$; $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{Y}_2$, duas soluções. Tem-se, supondo as três funções f_x, f_y e f_z crescentes,

$$39)\quad (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) \geqslant 0,$$

verificando-se a igualdade se e só se

$$40)\quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$$
$$41)\quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2.$$

Se as três funções f_x, f_y, f_z forem decrescentes, ter-se-á, na expressão (39), o sinal $\leqslant$ em vez do sinal $\geqslant$, sendo idênticas as condições de igualdade.

Portanto, por razão análoga à exposta na hipótese de isotropia, as duas soluções coincidem.

Devemos notar que as condições (36), (37) e (38) se verificam num meio anisótropo linear caracterizado por um tensor simétrico, desde que se escolham para eixos x, y e z os eixos em que a matriz dos elementos de $\bar{\beta}$ é diagonal. Não se verificam, no entanto, num meio isótropo não linear.

(1) Aparte $\mathbf{F}_3$.

(2) Representamos por $\bar{\xi}$ um tensor genérico ($\bar{\xi} = \bar{\beta}$; ...).

Se se verificarem condições tais que dois campos vectoriais $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$ satisfaçam, em dois domínios do espaço de idêntica configuração, a condições de semelhança análogas (com as generalizações evidentes), às indicadas para os meios isótropos, haverá analogia entre os campos $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$, isto é, ter-se-à, em pontos correspondentes do espaço

$$42) \quad \mathbf{X}' = K_1 \, \mathbf{X}$$
$$43) \quad \mathbf{Y}' = K_2 \, \mathbf{Y}.$$

1.3 *Generalização das condições de analogia directa*

Quer a condição de analogia discutida em 1.1, quer a discutida em 1.2, são casos particulares duma condição mais geral de analogia, que se verifica para campos vectoriais que satisfaçam às condições (33), (34) e (35), sendo a relação entre $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}$ tal que, além de biunívoca, seja verificada a desigualdade (39), ou só com o sinal $>$, ou só com o sinal $<$, e dando-se a igualdade se e só se as duas soluções coincidirem.

A desigualdade (39) traduz, como é óbvio, que a um acréscimo de $\mathbf{Y}$ corresponde um acréscimo de $\mathbf{X}$ cuja projecção sobre o acréscimo de $\mathbf{Y}$ ou tem sempre o mesmo sentido deste acréscimo ou sempre o sentido contrário. Por outras palavras, traduz que o «cociente escalar» (segundo a definição de Cisotti) dos vectores acréscimo de $\mathbf{X}$ e acréscimo de $\mathbf{Y}$ é, ou sempre positivo, ou sempre negativo.

1.4 *Analogia inversa*

Referimo-nos em 1.1, 1.2 e 1.3 à «analogia directa» entre dois campos vectoriais, segundo a qual se fazem corresponder os vectores que satisfazem a propriedades idênticas. Especialmente no caso de campos bidimensionais, tem muitas vezes interesse considerar a chamada «analogia inversa».

Seja num determinado domínio, um campo a duas dimensões x, y (ortogonais) caracterizado por dois vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, tais que (1)

$$44) \quad \text{rot } \mathbf{X} = \mathbf{F}_1 = F_1 \, \mathbf{U}_z$$
$$45) \quad F_1 = F_1 \, (x \, , \, y)$$
$$46) \quad \text{div } \mathbf{Y} = F_2$$
$$47) \quad F_2 = F_2 \, (x \, , \, y)$$
$$48) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{f} \, (\mathbf{X}) = (\overline{\beta} \, , \, \mathbf{X})$$
$$48') \quad \| Y_x \; Y_y \| = \begin{Vmatrix} \beta_{xx} & \beta_{xy} \\ \beta_{yx} & \beta_{yy} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_x \\ X_y \end{Vmatrix},$$

sendo: $\mathbf{U}_z$ o vector unitário do eixo ortogonal ao plano x, y; F_1 e F_2, funções arbitradas; $\mathbf{f}$ função biunívoca em cada ponto do espaço, mas eventualmente diferente de ponto para ponto.

Consideremos, para comodidade de exposição, notação complexa para os vectores de componentes segundo os eixos dos xx e dos yy. Isto é, sendo $\mathbf{Z}$ um vector genérico de componentes segundo os eixos dos xx e dos yy, Z_x e Z_y, seja

$$49) \quad \mathbf{Z} = Z_x + j \, Z_y = e^{j\zeta} \, Z.$$

Considere-se, no mesmo domínio (ou noutro com idêntica configuração geométrica, em pontos correspondentes), um campo vectorial caracterizado por dois vectores $\mathbf{X}'$ e $\mathbf{Y}'$, tais que, àparte factores de proporcionalidade, seja

$$50) \quad \text{rot } \mathbf{X}' = F_2 \, \mathbf{U}_z$$
$$51) \quad \text{div } \mathbf{Y}' = - F_1$$

(1) Representamos por $\| Z_x \; Z_y \|$ e $\begin{Vmatrix} Z_x \\ Z_y \end{Vmatrix}$ as matrizes das componentes do vector genérico $\mathbf{Z}$ segundo x e y, e por $\begin{Vmatrix} \xi_{xx} & \xi_{xy} \\ \xi_{yx} & \xi_{yy} \end{Vmatrix}$ a das componentes do tensor genérico ξ segundo x e y.

52) $\mathbf{X}' = e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{f}\ (e^{-j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{Y}') = (\beta'_i\ ,\ \mathbf{Y}')$

52') $\| X'_x\ X'_y \| = \begin{Vmatrix} \beta'_{ixx} & \beta'_{ixy} \\ \beta'_{iyx} & \beta'_{iyy} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Y'_x \\ Y'_y \end{Vmatrix}$,

sendo F_1, F_2, e $\mathbf{f}$ as mesmas funções que no campo anterior.

Se for, àparte os correspondentes factores de proporcionalidade,

53) $\mathbf{X}' = e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{Y}$

54) $\mathbf{Y}' = e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{X}$,

ter-se-à

55) $\text{rot}\ \mathbf{X}' = \text{rot}\ (e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{Y}) = (\text{div}\ \mathbf{Y})\ \mathbf{U}_z = F_2\ \mathbf{U}_z$

56) $\text{div}\ \mathbf{Y}' = \text{div}\ (e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{X}) = -\ F_1$.

Portanto, para adequadas relações entre as condições nos limites, suficientes para garantir a unicidade e correspondência das soluções $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$, haverá proporcionalidade entre as funções:

57) β'_{ixx}, β'_{ixy}, β'_{iyx}, β'_{iyy} e, respectivamente, β_{yy}, $-\beta_{yx}$, $-\beta_{xy}$, β_{xx} (1)

58) $\mathbf{X}'$ e $e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{Y}$

59) $\mathbf{Y}'$ e $e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathbf{X}$

60) X' e Y

61) Y' e X.

Àparte uma rotação de 90°, há uma inversão da correspondência entre os vectores de que são impostos o rotacional e a divergência. Na correspondência entre as propriedades do meio (relação entre os dois vectores que caracterizam o campo) há também uma «rotação de 90°».

Às linhas de força num dos campos corresponderão linhas ortogonais às linhas de força no outro.

A um fluxo de um dos vectores $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, através de um dado percurso num dos campos corresponde uma tensão, ao longo do mesmo percurso, no outro campo, respectivamente dos vectores $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, $-\mathbf{Y}'$, $-\mathbf{X}'$.

2 Método das analogias eléctricas

2.1 *Analogia directa entre um campo caracterizado por um vector irrotacional e outro solenoidal, e um campo eléctrico*

Seja um determinado domínio caracterizado por dois vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, satisfazendo às condições

62) $\text{div}\ \mathbf{X} = 0$

63) $\text{rot}\ \mathbf{Y} = 0$

64) $\mathbf{X} = \mathbf{f}\ (\mathbf{Y}) = (\beta\ ,\ \mathbf{Y})$,

sendo $\mathbf{f}$ contínua e biunívoca e eventualmente diferente de ponto para ponto.

(1) Em princípio, a relação indicada entre as componentes de β'_i e β não é necessária, mas apenas suficiente, dado haver uma infinidade de tensores ξ tais que $\mathbf{A} = (\xi\ ,\ \mathbf{B})$, para $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ arbitrários.

O campo eléctrico em corrente estacionária, num domínio em que não haja campos aplicados, satisfaz às condições

$$65)\quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$
$$66)\quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0\ ,$$

sendo $\mathbf{J}$ o vector densidade de corrente e $\mathbf{E}$ o vector campo eléctrico.

Com as generalizações convenientes, sendo o circuito constituído apenas por elementos ohmicos e sendo constantes os parâmetros em jogo, o campo eléctrico em corrente alternada sinusoidal, satisfaz a condições análogas.

Consideremos, num domínio de configuração geométrica idêntica ao dos vectores $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, um campo eléctrico satisfazendo, além das condições (65) e (66), à condição

$$67)\quad \mathbf{J} = \mathbf{f}'\ (\mathbf{E}) = (\bar{\sigma}, \mathbf{E})\ ,$$

sendo $\mathbf{f}'$ função contínua e biunívoca e $\bar{\sigma}$ um tensor condutividade. Seja $\mathbf{f}'$ tal que, em pontos correspondentes dos dois domínios, seja

$$68)\quad \mathbf{f}'\ (\mathbf{E}) = \frac{1}{K_2}\ \mathbf{f}\ (K_1\ \mathbf{E})\ ,$$

sendo K_1 e K_2 constantes.

Se as relações (64) e (67) se puderem, por exemplo, reduzir à forma indicada em 1.1 ou à forma indicada em 1.2, ou, ainda, à forma mais geral indicada em 1.3, e se, simultâneamente, forem impostas adequadas condições nos limites, estas relações são suficientes para garantir a unicidade dos dois campos vectoriais.

Se as condições nas fronteiras dos dois domínios forem análogas, e suficientes para os definir unìvocamente, os dois campos $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ serão análogos. Em pontos correspondentes dos dois domínios será

$$69)\quad \mathbf{X} = K_2\ \mathbf{J}$$
$$70)\quad \mathbf{Y} = K_1\ \mathbf{E}\ .$$

Será ainda

$$71)\quad \mathbf{E} = -\ \operatorname{grad} V$$
$$72)\quad \mathbf{Y} = -\ \operatorname{grad} V_m\ ,$$

sendo V e V_m funções potenciais.

2.2 *Analogia inversa entre um campo a duas dimensões caracterizado por um vector solenoidal e um vector rotacional, e um campo eléctrico a duas dimensões*

Consideremos um campo vectorial, reduzido a duas dimensões (x, y), caracterizado por dois vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ satisfazendo às condições

$$73)\quad \operatorname{div} \mathbf{X} = 0$$

ou

$$73')\quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0\ ,$$

$$74)\quad \operatorname{rot} \mathbf{Y} = \mathbf{F}\ (x, y) = F\ (x, y)\ \mathbf{U}_z$$

ou

$$74')\quad \frac{\partial Y_y}{\partial x} - \frac{\partial Y_x}{\partial y} = F\ (x, y)\ ,$$

$$75)\quad \mathbf{X} = \mathbf{f}\ (\mathbf{Y}),$$

sendo $\mathbf{U}_z$ o vector unitário do eixo ortogonal a (x, y), f função contínua, biunívoca e eventualmente função de ponto, e F função de ponto.

Consideremos um campo eléctrico, reduzido a duas dimensões (x, y), num domínio de idêntica configuração geométrica e em que não haja campos aplicados, em corrente estacionária, ou, com as generalizações convenientes, em corrente alternada sinusoidal. Seja esse campo tal que, por elemento de superfície dS, é introduzida na superfície a que se considera reduzido o campo, uma corrente

$$76)\quad dI = F' \,.\, dS,$$

sendo F′ função de ponto.

Tem-se, nas duas dimensões a que esteja reduzido o campo e sendo $\mathbf{J}$ o vector de componentes J_x, J_y, abstraindo das correntes dI definidas por (76):

$$77)\quad \operatorname{div} \mathbf{J} = F'$$

ou

$$77')\quad \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = F',$$

e

$$78)\quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

ou

$$78')\quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0\,.$$

Seja, em pontos correspondentes dos dois domínios,

$$79)\quad F' = -K_1 F$$

$$80)\quad \mathbf{E} = K_2\, e^{j\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{f}\left(\frac{1}{K_1}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{J}\right),$$

sendo $\mathbf{f}$ a mesma função em pontos correspondentes dos dois campos (eventualmente diferente de ponto para ponto), e K_1 e K_2 constantes.

Se as condições impostas aos dois campos vectoriais forem suficientes para garantir a sua unicidade e as condições nas fronteiras dos dois domínios forem «análogas», ter-se-á, em pontos correspondentes dos dois campos,

$$81)\quad \mathbf{X} = \frac{1}{K_2}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{E}$$

$$82)\quad \mathbf{Y} = \frac{1}{K_1}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{J}\,.$$

O campo $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ pode ser assim obtido a partir de um campo eléctrico que seja seu análogo inverso.

2.3 *Analogia directa de um campo vectorial irrotacional com um campo eléctrico numa rede de resistências*

Consideremos, num determinado domínio, um campo vectorial caracterizado por dois vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ satisfazendo às condições

$$83)\quad \operatorname{div} \mathbf{X} = F$$

$$84)\quad \operatorname{rot} \mathbf{Y} = 0$$

$$85)\quad \mathbf{X} = (\bar{\beta}\,,\, \mathbf{Y}),$$

sendo F uma função de ponto e $\bar{\beta}$ um tensor simétrico, eventualmente função de ponto.

Sejam, em cada ponto, três direcções ortogonais x, y, z, tais que a matriz associada $\overline{\beta}$ no sistema de eixos x, y, z, seja diagonal.

Num meio isótropo os eixos x, y e z são arbitrários, àparte deverem satisfazer à condição de ser ortogonais.

Num meio anisótropo mas cujas direcções principais (1) sejam conhecidas, x, y e z são conhecidos.

Consideremos (fig. 1) um recticulado definido por linhas tangentes em cada ponto aos eixos x, y, z e constituído por elementos Δx, Δy, Δz, pequenos à escala que interesse considerar. Associemos a cada nó P_0 desse recticulado um elemento de volume Δv definido pelas seis superfíceis paralelas a duas das direcções do recticulado, equidistantes de P_0 e dos nós vizinhos (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6).

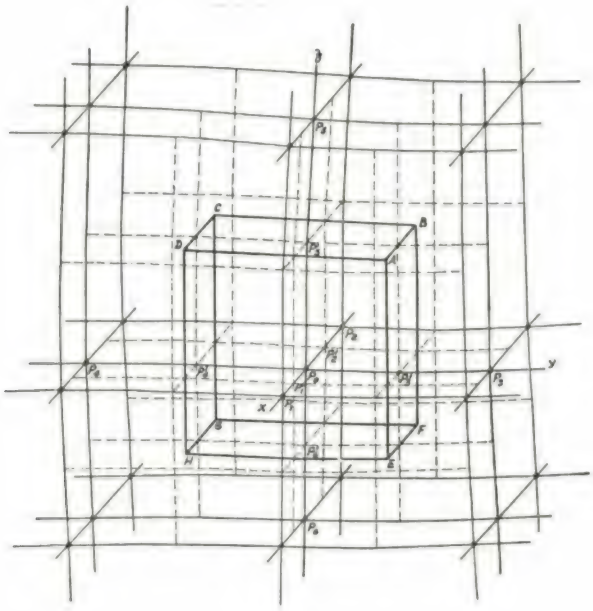


Fig. 1

Em elementos de volume Δv suficientemente pequenos a condição (83) pode ser traduzida por

$$86) \qquad \int (\mathbf{X}\,,\,\mathbf{U}_n)\,dS = F'\,\Delta v\,,$$

sendo dS um elemento da superfície S de Δv, $\mathbf{U}_n$ o vector unitário normal exterior a dS, e F' um valor de F num ponto do elemento Δv (2), e sendo o integral estendido a toda a superfície S. Isto é, o fluxo de **X** através da superfície que delimita Δv é proporcional a $F\Delta v$.

A menos termos de segunda ordem, pode-se por

$$87) \qquad \sum \pm X_r\,\Delta S_r = F'\,\Delta v\,,$$

estendendo-se o somatório a todas as facetas de Δv, sendo r um índice genérico representativo de x, y ou z e sendo X_r o valor de X_r por exemplo no ponto médio da faceta ΔS_r ortogonal à direcção r.

---

(1) Designamos por direcções principais três direcções ortogonais e tais que a matriz que corresponde ao tensor que caracteriza o meio, e que se supõe simétrico, seja diagonal referida a essas direcções.

(2) Sendo o elemento de volume suficientemente pequeno poder-se-á tomar o ponto médio ou o nó P_0 correspondente a Δv.

A condição (84) pode ser traduzida pela condição de a circulação do vector **Y** ao longo de um percurso fechado arbitrário, s, ser nula:

$$88)\quad \oint_s (\mathbf{Y}, \mathbf{ds}) = 0,$$

ou, a menos termos de segunda ordem,

$$89)\quad \sum (Y_x \Delta x + Y_y \Delta y + Y_z \Delta z) = 0,$$

referindo-se o somatório a um circuito fechado ao longo do recticulado.

A condição (85) pode ser traduzida pelas três relações

$$90)\quad X_x \,.\, \Delta x = \beta_x \,.\, (Y_x \,.\, \Delta x)$$
$$91)\quad Y_y \,.\, \Delta y = \beta_y \,.\, (Y_y \,.\, \Delta y)$$
$$92)\quad X_z \,.\, \Delta z = \beta_z \,.\, (Y_z \,.\, \Delta z),$$

ou

$$93)\quad X_r \,.\, \Delta r = \beta_r \,.\, (Y_r \,.\, \Delta r).$$

sendo r um índice genérico, representativo de x, y ou z.

Consideremos uma rede de resistências, em geral a três dimensões, por exemplo em regime estacionário, tal que se faça corresponder biunìvocamente os nós dessa rede aos nós do recticulado.

A um nó genérico do recticulado, P, corresponderá um nó genérico, N, da rede de resistências.

Seja a rede tal que a resistência que ligue dois nós vizinhos N_m N_n tenha o valor

$$94)\quad R_{mn} = K_1 \cdot \frac{1}{\beta_r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta S_r},$$

sendo: r representativo de x, y, ou z, consoante P_m e P_n estiverem respectivamente num eixo x, y, ou z; Δr a distância entre P_m e P_n segundo o eixo r; K_1 uma constante; β_r referente a um ponto intermédio entre P_m e P_n (1); ΔS_r a área da secção do elemento de volume Δv ortogonal a r.

Injecte-se no nó genérico N uma corrente Δi tal que

$$95)\quad \Delta i = K_2 F' \Delta v,$$

sendo K_2 uma constante e F' o valor de F num ponto de Δv (2).

Tem-se que:

1.º) A soma das correntes que divergem de N é Δi, ou, o que é o mesmo,

$$96)\quad \sum i_{mn} = \Delta i = K_2 F' \Delta v;$$

2.º) O integral cíclico do campo eléctrico **E**, ao longo da rede, é nulo:

$$97)\quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V,$$

ou

$$97')\quad \oint (E, ds) = 0,$$

ou

$$97'')\quad \sum (V_m - V_n) = 0,$$

sendo o somatório estendido a um percurso fechado;

(1) Sendo Δv suficientemente pequeno poder-se-à considerar o ponto médio.

(2) Sendo Δv suficientemente pequeno poder-se-à considerar o ponto P, correspondente ao nó N.

3.º) A relação entre os potenciais nos nós, e as correntes, é expressa por

$$98) \quad \int_{P_m}^{P_n} (\mathbf{E}, d\mathbf{s}) = V_m - V_n = R_{mn} \cdot i_{mn},$$

ou

$$98') \quad V_m - V_n = K_1 \cdot \frac{1}{\beta_r} \cdot \frac{i_{mn}}{\Delta S_r} \cdot \Delta r.$$

sendo i_{mn} a corrente na resistência R_{mn}, de N_m para N_n.

Consideremos o recticulado no campo **X**, **Y** (fig. 1) com a notação indicada na figura, e consideremos a porção da rede que lhe corresponde (fig. 2).

Sejam dois nós P_m e P_n do recticulado e os nós correspondentes da rede N_m e N_n.

Tem-se, a menos quantidades de segunda ordem (1),

$$99) \quad i_{mn} = K_2 \cdot X_r \cdot \Delta S_r$$

$$100) \quad V_m - V_n = K_1 K_2 Y_r \Delta r.$$

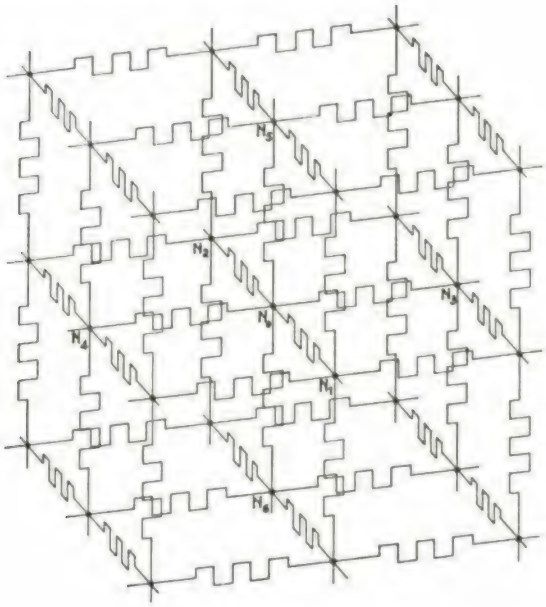


Fig. 2

Pode, portanto, representar-se um meio isótropo ou anisótropo por uma rede de resistências, estabelecendo a correspondência indicada entre a rede e o meio, e impondo adequadas condições nos limites.

Uma vez conhecidas as correntes e tensões nos nós da rede, **X** e **Y** obtêm-se, com a notação indicada, a partir das relações

$$101) \quad X_r = \frac{1}{K_2} \cdot \frac{i_{mn}}{\Delta S_r}$$

$$102) \quad Y_r = \frac{1}{K_1 K_2} \cdot \frac{V_m - V_n}{\Delta r}.$$

(1) Na hipótese de elementos de volume infinitésimais, infinitésimos de ordem superior.

2.4 *Analogia inversa de um campo vectorial solenoidal com um campo eléctrico numa rede de resistências*

Indicámos em 2.3 as condições de analogia directa entre um campo contínuo irrotacional e uma rede de resistências.

Sendo a rede de resistências análoga ao campo irrotacional «análogo inverso» de um campo vectorial solenoidal, a rede de resistências constituirá um «análogo inverso» deste campo.

2.5 *Analogia entre um campo magnético e um campo eléctrico*

O campo magnético em corrente estacionária satisfaz às condicões

$$\text{103)} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\text{104)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}' ,$$

sendo **B** e **H** os vectores indução magnética e campo magnético, **J** o vector densidade de corrente associado ao campo magnético, e c uma constante electromagnética universal.

Em corrente alternada de frequência industrial é, em geral, legítimo desprezar, para o cálculo do campo magnético, a corrente de deslocamento. Nessas condições, para efeito deste cálculo, serão também válidas as equações (103) e (104). Se tal não acontecer $\mathbf{J}'$ deve ser considerado a soma da corrente de condução e da corrente de deslocamento $\left(\mathbf{J}' = \mathbf{J}'_c + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$.

Num domínio em que

$$\text{105)} \quad \mathbf{J}' = 0 ,$$

é pois

$$\text{106)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 .$$

Suponhamos ainda que se despreza a não unicidade da relação entre **B** e **H** (associada à histerese), e que a relação entre **B** e **H** e as condições nas fronteiras do domínio são tais que se verifique a unicidade da solução do campo.

Nesse domínio o campo **B**, **H** satisfaz às condições definidas em (2.1) para o campo **X**, **Y**, sendo, portanto, válidas as condições de analogia aí indicadas.

Seja um campo magnético reduzido a duas dimensões (x, y), e satisfazendo, num determinado domínio, às condições

$$\text{107)} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

ou

$$\text{107')} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 ,$$

$$\text{108)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}' \quad (1)$$

ou

$$\text{108')} \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J'_z$$

e

$$\text{109)} \quad \mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}) ,$$

sendo J'_z a componente de $\mathbf{J}'$ segundo a direcção ortogonal a x, y, e sendo **f** contínua e biunívoca e, eventualmente, função de ponto. Suponhamos ainda que se verifica a unicidade da solução do campo.

(1) Admite-se que $\mathbf{J}'$ é ortogonal a (x, y).

Nesse domínio, o campo magnético satisfaz às condições definidas em (2.2) para o campo **X**, **Y**. São, portanto, válidas as condições de analogia aí indicadas, fazendo

$$110) \quad F = \frac{4\pi}{c} J'_z .$$

Em pontos correspondentes dos dois campos, ter-se-á

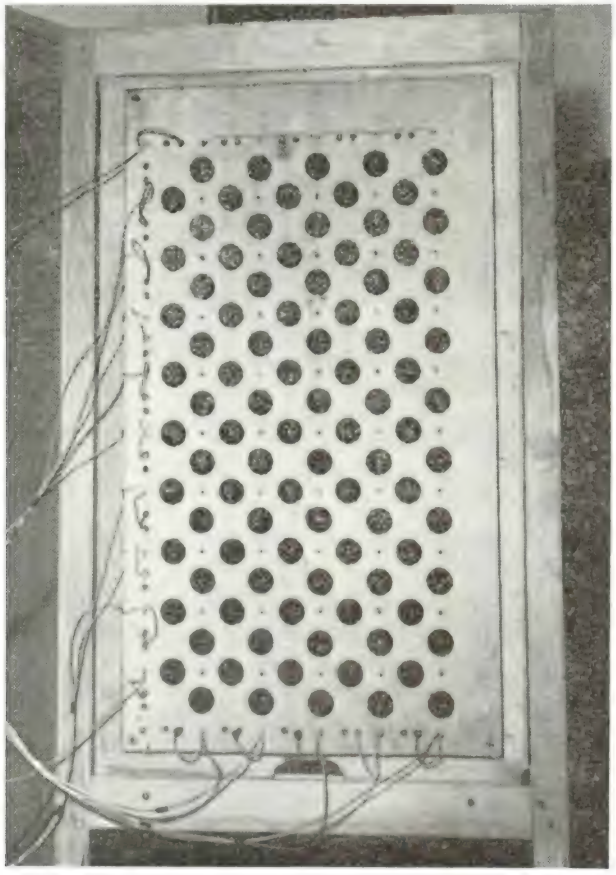
$$111) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{K_1} e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{J}$$

$$112) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{K_2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{E} .$$

2.6 *Métodos experimentais utilizados*

Para a obtenção dos análogos eléctricos dos campos em estudo utilizou-se papel condutor e redes de resistências.

O papel condutor, desde que uniforme e isótropo, representa um meio a duas dimensões de permeabilidade uniforme.



Fot. 1

Uma rede de condutores a duas dimensões submetida a um campo eléctrico representa, sob a forma de diferenças finitas, um campo a duas dimensões.

Utilizou-se papel condutor, com a designação comercial «Teledeltos», com eléctrodos de uma tinta condutora, aplicada nas duas faces.

Fizeram-se ensaios para verificação de uniformidade e isotropia e variação da resistividade com a temperatura e com o estado higrométrico da atmosfera vizinha.

Atendendo às especiais condições dos casos em estudo, as propriedades eram satisfatórias, podendo ser grandemente atenuadas por adequados factores de correcção as consequências das mais importantes causas de erro.

O papel condutor é pouco sensível a variações de temperatura mas bastante sensível a variações de humidade. Por se não dispor de ambiente condicionado trabalhou-se com o papel colocado numa zona iluminada por varias lâmpadas de potência elevada, conseguindo-se uma temperatura na vizinhança do papel relativamente uniforme e cerca de 5° C superior à ambiente.

Fizeram-se ensaios para estudo de diversos pormenores experimentais, como por exemplo as dimensões mais convenientes dos eléctrodos, na hipótese de a tensão ao longo de uma linha limite do modelo ligada por eléctrodos ao exterior variar ao longo dessa linha limite.

Para a rede de condutores empregaram-se resistências à base de carbono que, nas condições em que foram utilizadas, eram bastante estáveis, necessitando, porém, de ser medidas, por não corresponderem com aproximação suficiente aos valores nominais.

Utilizaram-se dois paineis para a montagem destas resistências. Estes paineis eram de madeira, sendo os nós da rede obtidos por meio de parafusos de bronze.

Um dos paineis (fot. 1) era constituido por uma série de suportes de fichas ligando os nós da rede. As resistências eram montadas em fichas que se podiam colocar nos suportes, permitindo assim a sua fácil substituição. Este painel permitia a colocação de 115 fichas.

O outro painel (fot. 2) era constituido simplesmente pelos parafusos de bronze, sendo as resistências apertadas por meio de porcas. Neste painel podiam ser colocadas 1 012 resistências.

Nalguns casos utilizámos modelos constituidos por papel condutor e rede de condutores ligada ao papel através de eléctrodos. Tal foi o caso do estudo do campo magnético nos dentes e cavas das máquinas eléctricas que não o campo associado aos condutores situados na cava em estudo. Representou-se a cava e entreferro, de permeabilidade uniforme, por papel condutor, e o dente, de permeabilidade variável, por uma rede de resistências.

Fizeram-se ensaios para análise das condições experimentais do conjunto «papel-rede», designadamente no que dizia respeito à forma dos eléctrodos e seu espaçamento, problema que, nos casos em estudo, apresentava características peculiares.

3 Aplicação do método das redes de resistências ao estudo de um campo vectorial em que a relação entre os dois vectores que o caracterizam depende do valor local desses vectores. Convergência

3.1 *Método de aproximações sucessivas*

Seja, num determinado domínio, um campo vectorial caracterizado por dois vectores **X** e **Y** satisfazendo, nesse domínio, por exemplo às condições

113) $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$

114) $\operatorname{rot} \mathbf{Y} = 0$

115) $\mathbf{X} = \beta \mathbf{Y}$

116) $X = \beta Y = f(Y)$,

sendo f função contínua e eventualmente função de ponto.

O campo **X** , **Y** poderá ser, por exemplo, um campo magnético num domínio irrotacional:

117) $\mathbf{X} = \mathbf{B}$

118) $\mathbf{Y} = \mathbf{H}$

119) $\beta = \mu$.

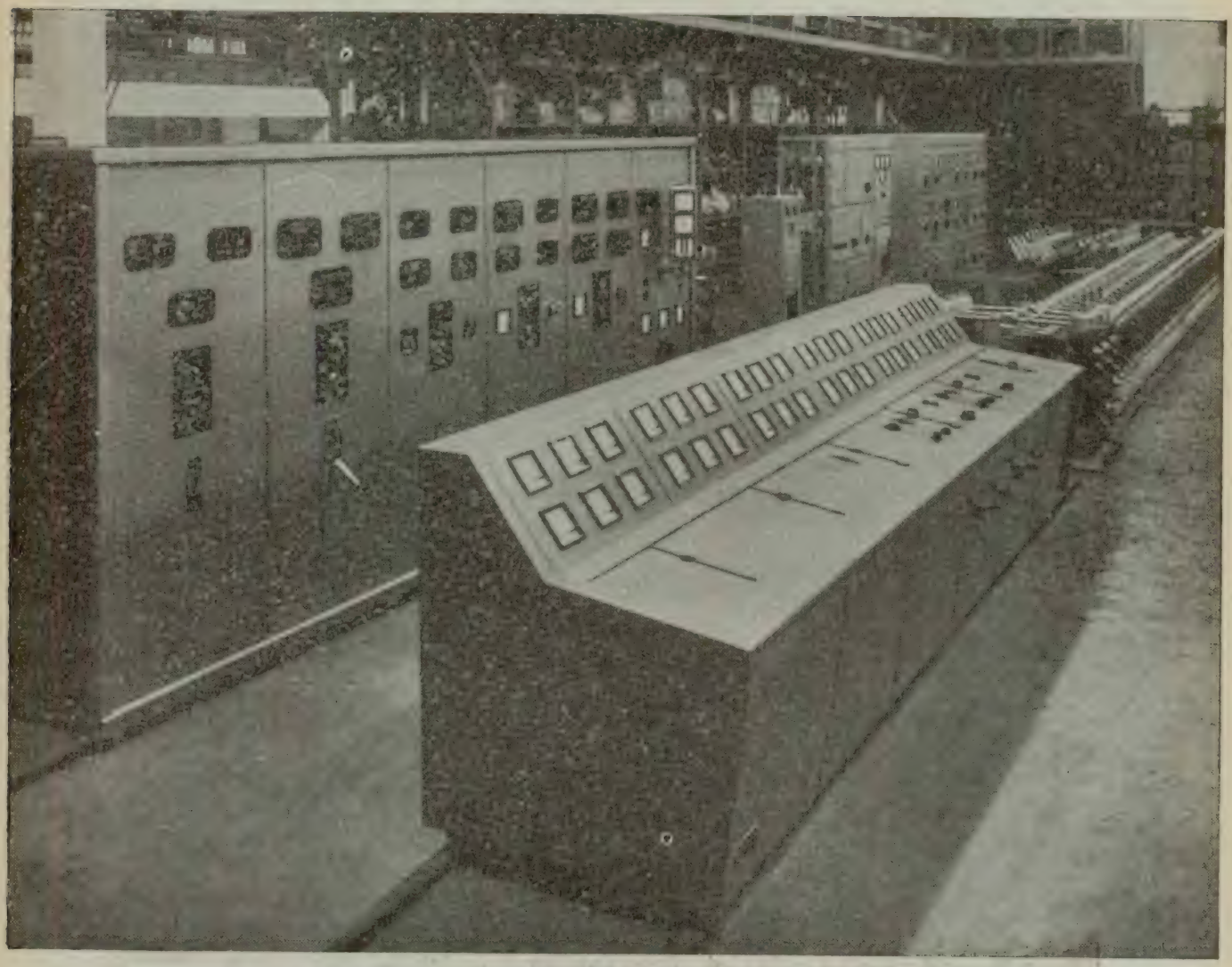
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

INDÚSTRIA DE CERÂMICA

INSTALAÇÕES COMPLETAS DE FÁBRICAS

ESTUDOS • PROJECTOS • ORÇAMENTOS
ASSISTÊNCIA TÉCNICA

Máquinas preparadoras

Fieiras de vácuo

Fieiras de vácuo com injecção de vapor

(Fabrico sob licença Uniceram)

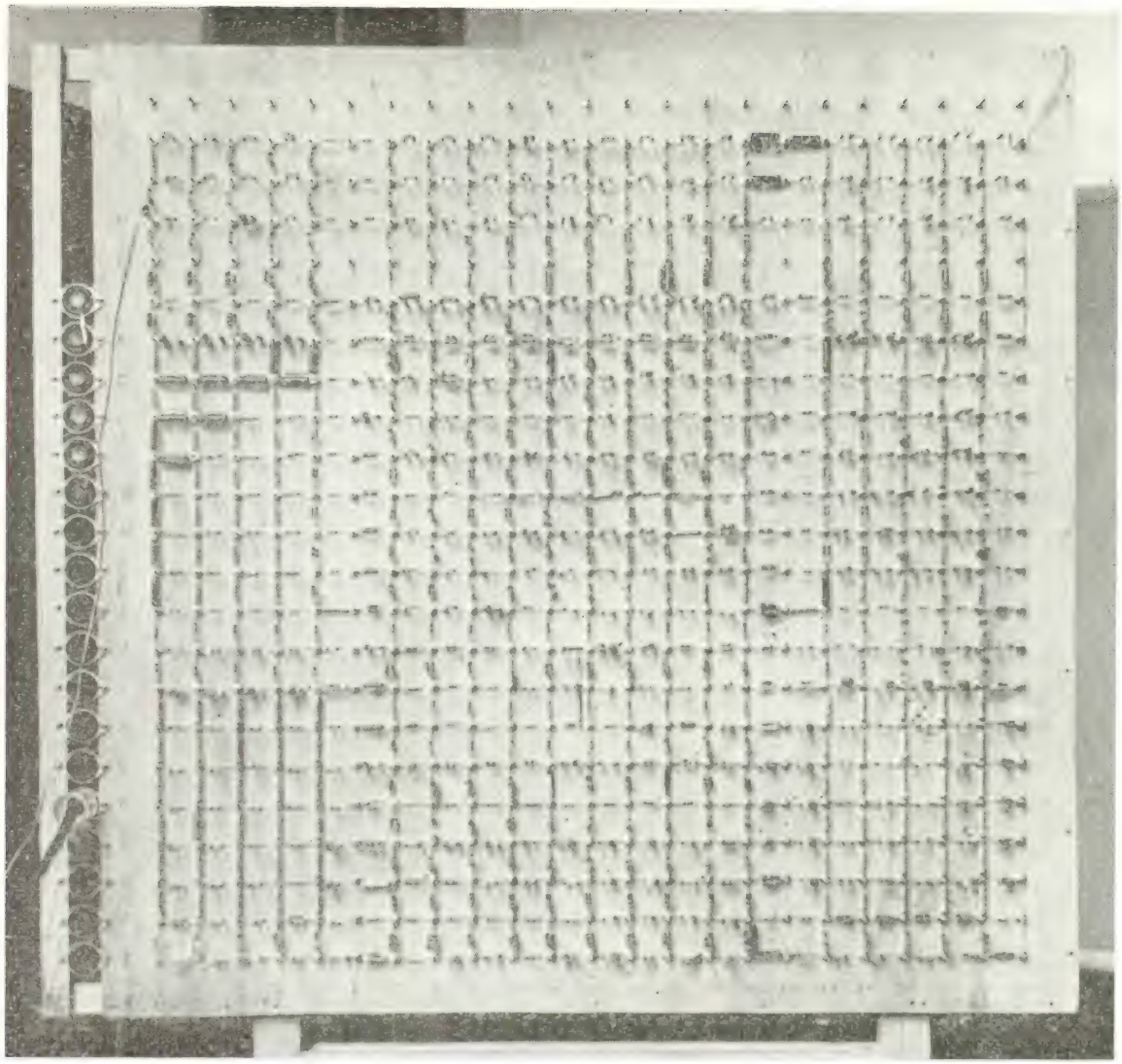
Alimentadores pneumáticos e activadores de secagem (sistema Klostermeyer)

Alimentadores mecânicos (sistema Ruetz)

Secagem artificial

Acessórios e aparelhagem para fornos em ligas especiais

COMETNA COMPANHIA METALÚRGICA NACIONAL, S. A. R. L.
SUCESSORA DE ALFREDO ALVES & C.ª (FILHOS) — FABRICAS VULCANO E COLARES
RUA DA ACADEMIA DAS CIENCIAS, 5 — LISBOA 2 — TELEF. P P C A 3 17 10 (5 LINHAS)



Fot. 2

Consideremos um campo eléctrico análogo (analogia directa), representado, por exemplo, por uma rede de resistências.

Estabeleça-se uma distribuição de resistências. Obter-se-á um campo satisfazendo às condições

$$120) \quad \text{div } \mathbf{J} = 0 \qquad (\mathbf{X} <> \mathbf{J})$$
$$121) \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \qquad (\mathbf{Y} <> \mathbf{E}),$$

ou, melhor, às equações correspondentes sob a forma de diferenças finitas, mas não, em geral, à condição

$$122) \quad \mathbf{J} = \mathbf{f}(\mathbf{E}) = \sigma\, \mathbf{E} \qquad (\beta <> \sigma).$$

Se em cada ponto se medir J (ou E), (ou melhor se se medirem as tensões e correntes nas resistências), e calcular o valor de σ correspondente, segundo a relação dada $\sigma = \sigma$ (J) [ou $\sigma = \sigma$ (E)], obter-se-á o valor da condutividade nesse ponto para uma primeira aproximação, podendo o processo ser ou não convergente.

No caso do ferro fortemente saturado ou outro de análoga variação de β (ou σ) a convergência apresenta características especiais.

Por ser

$$123) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + 4 \pi \mathbf{M})^{(1)},$$

mesmo à saturação perfeita $\left(\frac{\partial M}{\partial H} = 0\right)^{(2)}$ não corresponde a constância de B $\left(\frac{\partial B}{\partial H} = \mu_0 \neq 0\right)$.

Tem, no entanto, interesse considerar, por vezes, a hipótese extrema $\frac{\partial X}{\partial Y} = 0$. Tem-se então

$$124) \quad X = X_s$$

$$125) \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{X_s} \cdot Y.$$

A convergência apresenta-se com características distintas, conforme se trate duma distribuição do «tipo série» ou do «tipo paralelo» (casos limites). Nos parágrafos seguintes analisam-se, no seu aspecto mais simples, esses casos limites.

3.2 *Distribuição do tipo série*

Designamos por esta forma um campo tal que a configuração das linhas de força é aproximadamente conhecida, pretendendo-se determinar a lei de variação do campo ao longo de um tubo de força.

Seja o campo indicado na fig. 3-a (campo uniforme) representando, como se indica na fig. 3-c, por dois eléctrodos aos potenciais V' e V'' ligados por duas resistências R_a e R_b, em série, a que correspondem diferenças de potencial ΔV_a e ΔV_b, e suponhamos que, sabendo ser uniforme o valor do campo numa secção perpendicular ao eixo a a', se pretende determinar a sua lei de variação, ao longo do eixo a a', por aproximações sucessivas, sem partir do conhecimento da sua uniformidade, e tomando como base o valor de R_a.

Se se determinarem ΔV_a e ΔV_b verifica-se a relação

$$126) \quad \frac{\Delta V_a}{R_a} = \frac{\Delta V_b}{R_b}.$$

No caso extremo atrás referido $\left(\frac{\partial X}{\partial Y} = 0\right)$ tem-se, portanto, que o método de medição de E (ou Y) não é convergente.

Na fig. 4 representamos gràficamente o método de aproximações sucessivas baseado na medi-

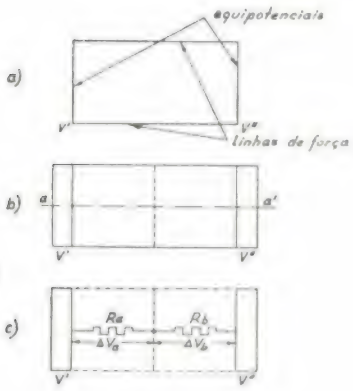


Fig. 3

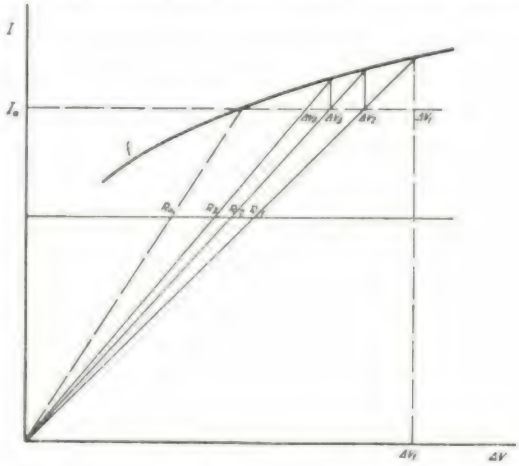


Fig. 4

(1) Sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo e **M** o vector intensidade de polarização magnética.

(2) Na hipótese que estamos a considerar de μ ser um escalar, **H**, **B**, e **M** são paralelos.

ção de E, sendo R_o a solução de R_b, R_1 a resistência primeiramente arbitrada, e R_2, R_3; ..., R_n, ... os sucessivos valores obtidos para a resistência. Sendo a resistência R_1 e dado que se toma como base o valor de R_n (1) estabelecer-se-á um campo eléctrico correspondente a ΔV_2, valor a que, segundo a relação $f(I, \Delta V) = 0$, corresponde a resistência R_2, que será a segunda aproximação. Anàlogamente se determinam os valores R_n da resistência nas sucessivas aproximações.

Apresentamos a discussão da convergência do método na hipótese de $f(X, Y)$ [ou $f(I, \Delta V)$] ser linear, o que é, salvo pontos singulares, válido em vizinhanças suficientemente pequenas da solução.

Seja $f = 0$ da forma

$$127) \quad \Delta V - \Theta I + \Xi = 0 ,$$

sendo, no domínio considerado, Θ e Ξ constantes.

É

$$128) \quad \frac{\Delta V_{n+1} - \Delta V_o}{\Delta V_n - \Delta V_o} = 1 - \frac{R_n}{\Theta} .$$

Portanto, a convergência do método depende fundamentalmente da elasticidade de ΔV em relação a I (2), no domínio em consideração:

a) Se $\frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)} > \frac{1}{2}$ (3)

o processo é convergente;

a_1) Se $\frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)} > 1$

a convergência é monotónica, e tanto mais rápida quanto mais o valor de $\frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)}$ se aproximar da unidade;

a_2) Se $\frac{1}{2} < \frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)} < 1$

a convergência é alternada, e tanto mais rápida quanto mais o valor de $\frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)}$ se aproximar da unidade;

b) Se $\frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)} < \frac{1}{2}$

o processo é divergente;

b_1) Se $0 < \frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)} < \frac{1}{2}$

a divergência é alternada;

b_2) Se $\frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)} < 0$

a divergência é monotónica.

---

(1) A corrente é a mesma em R_a e R_b.

(2) É $\frac{d(\Delta V)}{dI} = \Theta$ e portanto $\frac{\mathcal{E}(\Delta V)}{\mathcal{E}(I)} \simeq \frac{\Theta}{R_n}$.

(3) Representamos por $\frac{\mathcal{E} z}{\mathcal{E} x}$ a elasticidade duma variável genérica z em relação à variável genérica x.

Por exemplo, no caso do «análogo» do ferro fortemente saturado, e para valores não muito elevados de H (1), caso em que

$$\frac{\mathcal{E}\,(\Delta V)}{\mathcal{E}\,(I)} >> 1\,,$$

o processo é convergente, porém muito lentamente. Por exemplo, para a relacão f (H, B) = 0 dada pela curva da fig. 5, tomando como base $R_a = R_b$ correspondendo a $\frac{\mu_0}{\mu} = 0{,}1$ (solução final), e arbi-

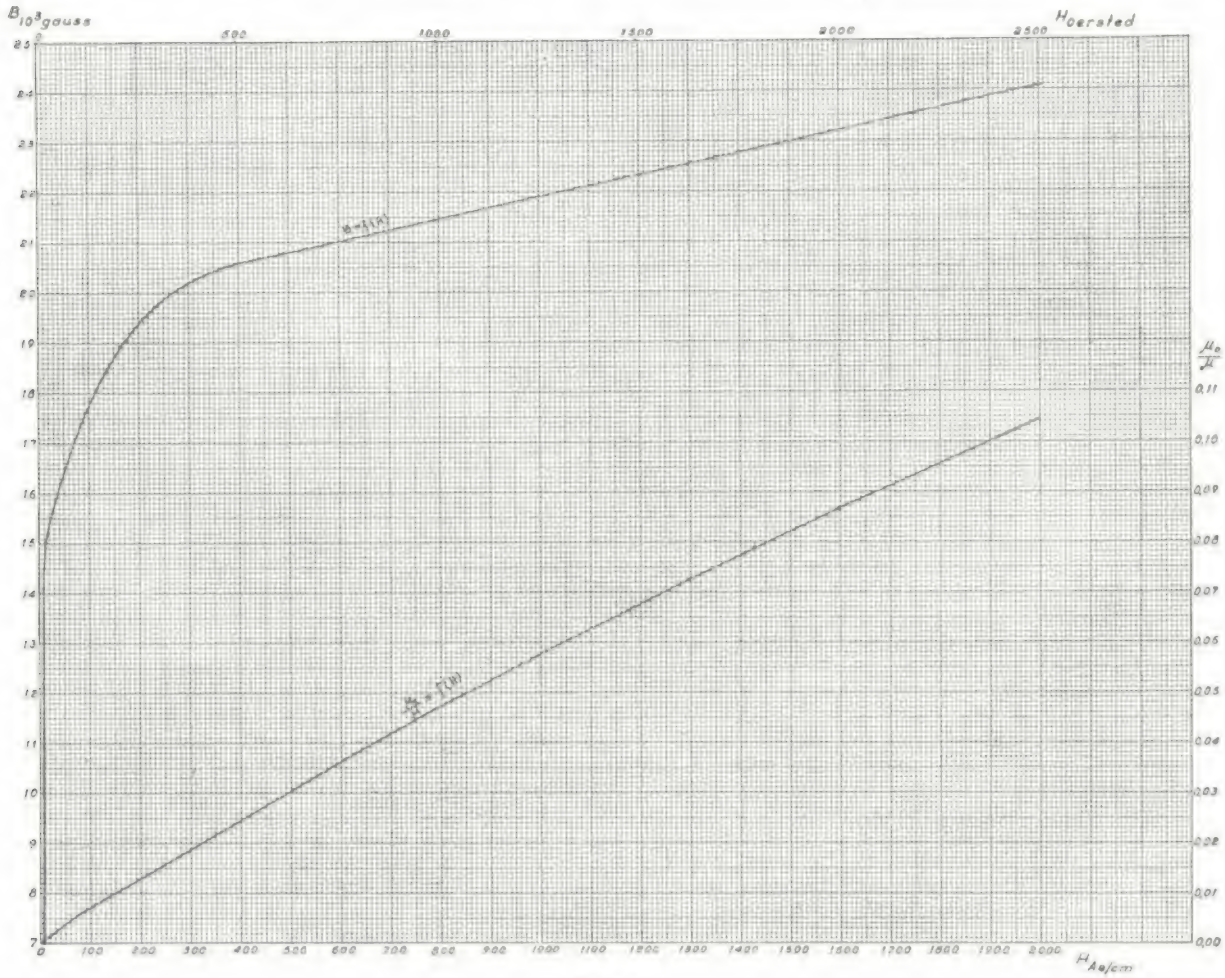


Fig. 5

trando em primeira aproximação $\frac{R_1}{R_0} = 0{,}8$ (erro de 20 %) seriam necessárias seis aproximações para obter um erro de 10 % e dez para obter um erro de 5 %.

(1) Para fortes saturações é $\frac{\partial M}{\partial H} \simeq 0$, e $\frac{\mathcal{E}\,(\Delta V)}{\mathcal{E}\,(I)}$ é função decrescente de H (ou ΔV), sendo

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathcal{E}\,(\Delta V)}{\mathcal{E}\,(I)} = 1 + 0\,.$$

No entanto, para os valores de H normais nas máquinas eléctricas, é

$$\frac{\mathcal{E}\,(\Delta V)}{\mathcal{E}\,(I)} >> 1\,.$$

Se numa distribuição do «tipo série» se determinar I_a e I_b, como $I_a = I_b$, logo na primeira aproximação se determina R_b com erro nulo, excepto no caso extremo referido, em que não é possível determinar E (ou H) a partir de J.

3.3 *Distribuição do tipo paralelo*

Designamos por esta forma um campo tal que a distribuição das equipotenciais é aproximadamente conhecida, pretendendo-se determinar a lei de variação do campo ao longo de uma mesma equipotencial.

Seja o campo indicado na fig. 6-a (campo uniforme) representado como se indica na fig. 6-c por dois eléctrodos aos potenciais V' e V'' ligados por duas resistências R_a e R_b percorridas por correntes I_a e I_b, e suponhamos que se pretendia determinar esse campo por aproximações sucessivas sem partir do conhecimento da sua uniformidade, conhecendo as equipotenciais extremas, e tomando como base o valor de R_a.

Como

$$129) \quad \Delta V_a = \Delta V_b ,$$

se se medir Y (ou ΔV), logo na primeira aproximação se obtém a relação entre R_a e R_b com erro nulo $\left(\text{excepto na hipótese de ser } \frac{d(\Delta V)}{dI} = 0 \right)$.

Se se medir I_a e I_b, sendo

$$130) \quad \Delta V = V' - V'' ,$$

vem

$$131) \quad I^a = \frac{\Delta V}{R_a}$$

$$132) \quad I_b = \frac{\Delta V}{R_b} .$$

Tomando como base R_a (ou I_a) vem

$$133) \quad \frac{I_b}{I_a} = \frac{R_a}{R_b} .$$

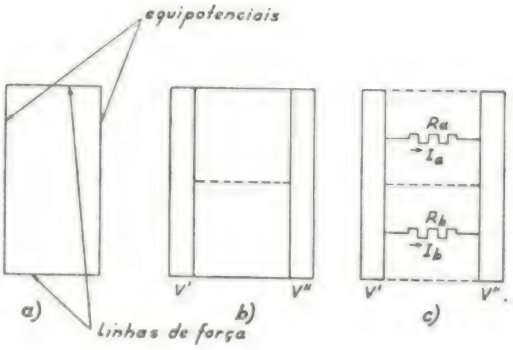


Fig. 6

Na fig. 7 representamos gràficamente o método de aproximações sucessivas baseado na medição de I (ou X).

Sendo R_1 o valor inicialmente arbitrado para R_b, estabelecer-se-á uma corrente I_2, valor a que, segundo a relação $f(\Delta V, I) = 0$, corresponde a resistência R_2, que será a segunda aproximação. Anàlogamente se determinam os valores R_m da resistência nas sucessivas aproximações.

Apresentamos a discussão da convergência do método na hipótese de f ser linear.

Seja a equação (127).

É

$$134) \quad \frac{I_{n+1} - I_o}{I_n - I_o} = 1 - \frac{(-)}{R_n} .$$

Portanto a convergência do método depende da elasticidade de $\Delta V = f(I)$ no domínio em consideração:

a) Se $\frac{\varepsilon(\Delta V)}{\varepsilon(I)} > 2$

o processo é divergente, sendo a divergência alternada;

b) Se $0 < \frac{\varepsilon(\Delta V)}{\varepsilon(I)} < 2$

o processo é convergente;

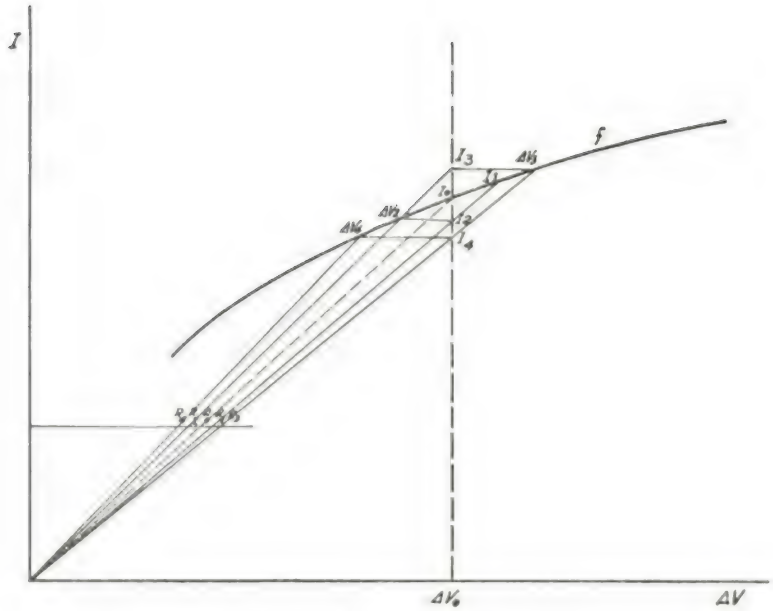


Fig. 7

b₁) Se $1 < \frac{\varepsilon\,(\Delta V)}{\varepsilon\,(I)} < 2$

a convergência é alternada, e tanto mais rápida quanto mais a elasticidade se aproximar da unidade ;

b₂) Se $0 < \frac{\varepsilon\,(\Delta V)}{\varepsilon\,(I)} < 1$

a convergência é monotónica, e tanto mais rápida quanto mais se aproximar da unidade (fig. 8) ;

c) Se $\frac{\varepsilon\,(\Delta V)}{\varepsilon\,(I)} < 0$

o processo é divergente, sendo a divergência monotónica.

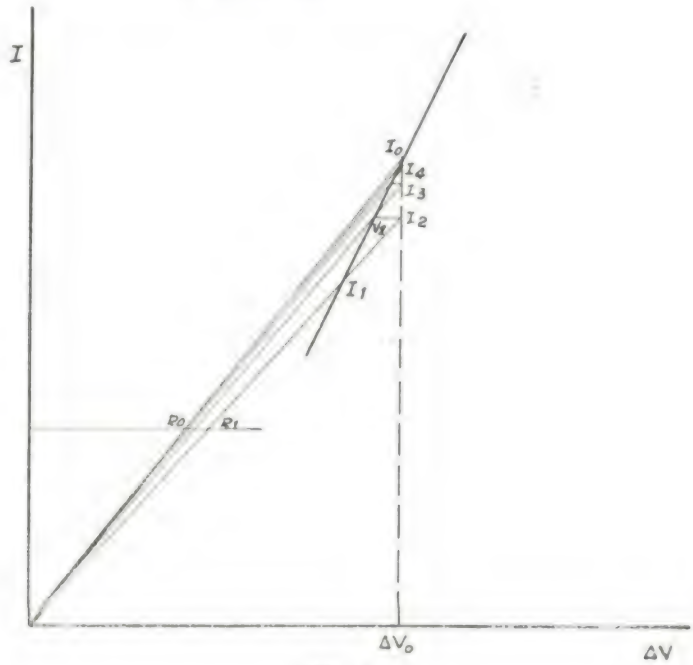


Fig. 8

Por exemplo, no caso do análogo do ferro fortemente saturado, mas em que o campo H não seja muito elevado (1), ter-se-á

$$\frac{\varepsilon\,(\Delta V)}{\varepsilon\,(I)} > 2,$$

sendo, portanto, o processo divergente.

3.4 *Comparação das condições de convergência*

As condições de convergência discutidas em 3.2 e 3.3, podem ser sintetizadas no seguinte quadro:

$\frac{\varepsilon(\Delta V)}{\varepsilon(I)}$	Distribuição do tipo série		Distribuição do tipo paralelo	
	Método de medição de I (ou J ou X)	Método de medição de ΔV (ou E ou Y)	Método de medição de I (ou J ou X)	Método de medição de ΔV (ou E ou Y)
∞			divergente	
2		convergente		
1	convergente		convergente	convergente
0,5				
0		divergente		
$-\infty$			divergente	

Deste quadro ressalta que a convergência destes métodos depende fundamentalmente:

a) Do tipo do campo, designadamente da maior ou menor variação dos vectores **J** e **E** ou de I e ΔV para uma alteração da distribuição de condutividades, na vizinhança da distribuição que satisfaz às condições nos limites e às três equações (120), (121) e (122) ou (113), (114) e (115) e (116).

b) Da elasticidade do módulo de um dos vectores do campo em relação ao módulo do outro vector:

$$\frac{\varepsilon\,(E)}{\varepsilon\,(J)} \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon\,(Y)}{\varepsilon\,(X)} \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon\,(\Delta V)}{\varepsilon\,(I)}.$$

Conforme os casos em estudo, e àparte métodos específicos mais ràpidamente convergentes, se deverá utilizar um ou outro dos dois métodos ou uma criteriosa combinação de ambos.

3.5 *Distribuição do tipo mixto*

Numa distribuição que possa considerar-se como a sobreposição ou melhor, composição, das duas distribuições indicadas, pode utilizar-se um processo mixto.

Ao longo de um tubo de força, o conhecimento da lei de variação de I, por exemplo numa distribuição arbitrada, permitirá determinar o valor médio da resistividade nas equipotenciais desse tubo de força, para uma segunda aproximação.

Em cada equipotencial desse tubo de força o conhecimento da lei de variação de E permitirá, a partir do valor médio prèviamente determinado, estabelecer uma segunda aproximação para a lei de variação da resistividade.

(1) Inferior a cerca de 21×10^3 oersted para os ferros normalmente utilizados nos dentes das máquinas eléctricas.

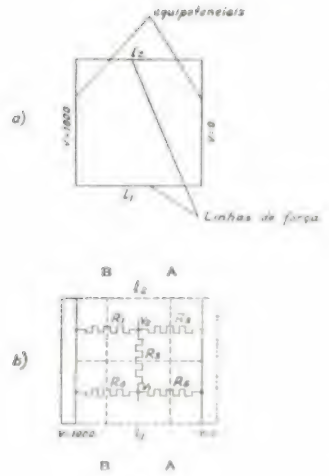


Fig. 9

Pode-se também proceder por ordem inversa.

Seja, por exemplo, o caso representado na fig. 9-a, de um campo bidimensional em que se supõe conhecer apenas as equipotenciais $V = 0$ e $V = 1000$ e as linhas de força l_1 e l_2 e que se representa por uma pequena rede (fig. 9-b). Supondo não ser conhecida a relação entre as resistências, estas terão primeiramente que ser arbitradas.

Sendo:

$$R_1 = 191\ \Omega$$
$$R_2 = 200\ \Omega$$
$$R_3 = 195\ \Omega$$
$$R_4 = 149\ \Omega$$
$$R_5 = 194\ \Omega,$$

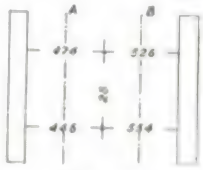


Fig. 10

obtiveram-se para V_1 e V_2 os valores 554 e 526 e portanto as diferenças de potencial são as indicadas na fig. 10.

Consideremos apenas as tensões na direcção de l_1 e l_2 e suponhamos, por exemplo, que $\frac{1}{\beta}$ é proporcional a Y (1). Tomando como base a resistência R_2 ($R_2 = 200\ \Omega$), obtêm-se os valores:

	ΔV		R
R_2	526	< >	200 Ω
R_5	554	< >	210, (6) Ω
R_1	474	< >	180, (5) Ω
R_4	446	< >	169, (8) Ω .

Como a corrente total e portanto a densidade de corrente média em A e B são iguais, devê-lo-ão ser também, em primeira aproximação, os valores médios da resistividade nas secções A e B e portanto também iguais os valores médio de R_2 e R_5, e médio de R_1 e R_4. A relação entre R_2 e R_5 e R_1 e R_4 corresponderá, nesta aproximação, à relação entre os valores de E (ou ΔV) obtidos na distribuição de resistências arbitrada.

Portanto, tomando como base uma resistência média 200 Ω, as resistências deverão ser, em primeira aproximação:

$$R_1 = 206\ \Omega$$
$$R_2 = 195\ \Omega$$
$$R_4 = 194\ \Omega$$
$$R_5 = 205\ \Omega .$$

A solução final será

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 .$$

Portanto, tendo-se partido de uma distribuição de resistências com um erro máximo relativo ao valor médio de cerca de 19 %, obteve-se com uma só aproximação uma distribuição com um erro máximo de 3 %.

Noutro ensaio análogo, partindo de uma distribuição com um desvio máximo em relação ao valor médio de 9 % obteve-se com uma só aproximação uma distribuição com um erro máximo de 1 %.

Seja por exemplo o caso de determinação do campo nos dentes das máquinas eléctricas. Poder-se-ia seguir o método de medição de H (ou ΔV) que se verificou ser convergente, embora muito lentamente. No entanto, este campo pode considerar-se uma composição de distribuições do tipo série e paralelo que, sob o ponto de vista de convergência, é de certo modo análoga ao caso mixto atrás analisado, pois, à excepção do topo do dente, o campo é dominantemente radial.

No Capítulo II analisamos com mais pormenor a aplicação do método exposto à determinação do campo nos dentes das máquinas eléctricas.

(1) Hipótese correspondente a uma saturação ideal $\left(\frac{\partial X}{\partial Y} = 0\right)$.

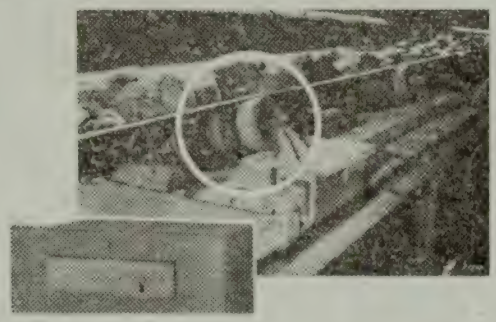
(Continua)

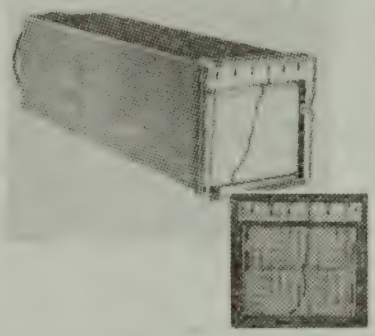
PHILIPS

contribui para o aperfeiçoamento industrial

Pesagem electrónica

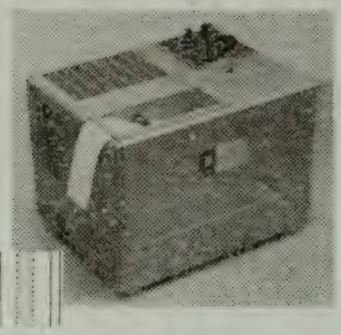
- INTEGRA A TOTALIDADE DO PESO DE MATERIAL TRANSPORTADO PELA BANDA NA UNIDADE DE TEMPO.
- O SISTEMA INSTALA-SE COM FACILIDADE NUMA BANDA JÁ EXISTENTE.
- É INSENSÍVEL À HUMIDADE E AO PÓ.
- POSSIBILIDADE DE COLOCAR O INSTRUMENTO DE LEITURA NO LOCAL MAIS CONVENIENTE, QUE PODE SER MUITO DISTANTE DO LOCAL DA PESAGEM.
- PERMITE O REGISTO DIÁRIO DAS QUANTIDADES TRANSPORTADAS.
- GRANDE ROBUSTEZ E ESTABILIDADE DE FUNCIONAMENTO QUE DISPENSA PRÁTICAMENTE QUALQUER ASSISTÊNCIA TÉCNICA.





Registadores potenciométricos miniatura para tensões contínuas e temperaturas

A MODERNA INDÚSTRIA TEM NECESSIDADE, PARA CONTROLAR AS SUAS MÚLTIPLAS OPERAÇÕES, DE NUMEROSOS APARELHOS QUE DEVERÃO TER CONSEQUENTEMENTE, DIMENSÕES REDUZIDAS. OS REGISTADORES POTENCIOMÉTRICOS MINIATURA PHILIPS CORRESPONDEM A ESTA NOVA EXIGÊNCIA. DIMENSÕES REDUZIDAS, ROBUSTEZ, PRECISÃO, AMPLIFICADOR TRANSISTORIZADO, CIRCUITO IMPRESSO, TAIS SÃO AS CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS QUE FAZEM DESTES REGISTADORES NOTÁVEIS AUXILIARES PARA A INDÚSTRIA E PARA OS LABORATÓRIOS DE INVESTIGAÇÃO.



Oscilógrafos de registo directo

TANTO NA INDÚSTRIA COMO NO LABORATÓRIO É POR VEZES INDISPENSÁVEL REGISTAR OS FENÓMENOS OBSERVADOS SOBRE UMA MÁQUINA OU UMA MONTAGEM EM ESTUDO.

É GERALMENTE FUNDAMENTAL QUE ESSE REGISTO POSSA SER EXAMINADO IMEDIATAMENTE. POR OUTRO LADO, CONVÉM QUE A BANDA DE REGISTO SEJA O MAIOR POSSÍVEL, BEM COMO A GAMA DAS FREQUÊNCIAS REPRODUZIDAS COM FIDELIDADE.

ISTO CONSEGUE-SE UTILIZANDO OS OSCILÓGRAFOS "OSCILLOSCRIPT".

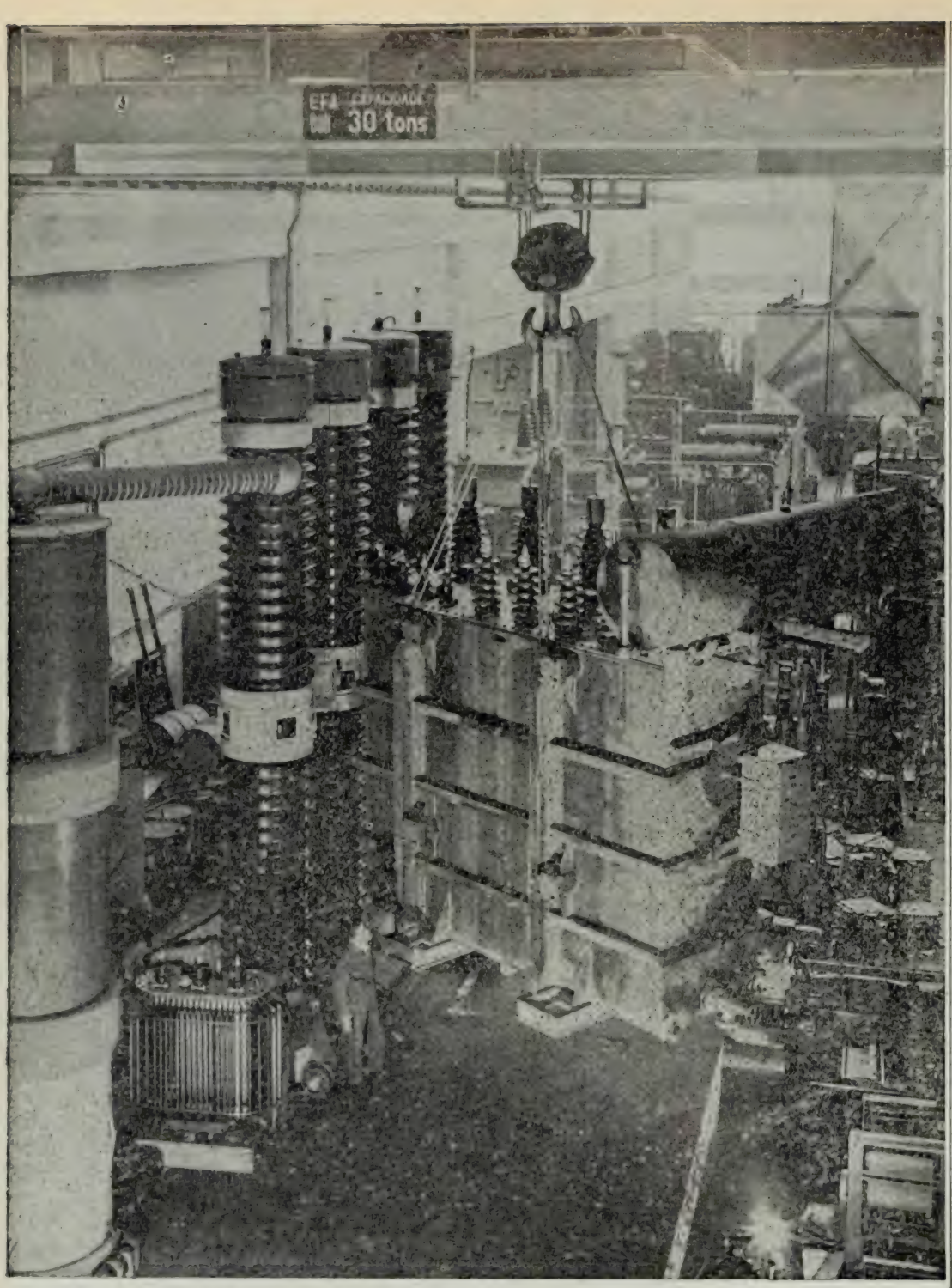
PARA INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES CONSULTAR

PHILIPS PORTUGUESA, S.A.R.L.

SECÇÃO INDÚSTRIA

LISBOA
RUA JOAQUIM ANTONIO DE AGUIAR, 66

PORTO
RUA FERNANDES TOMÁS, 760



EFACEC

Vista do interior de uma das Fábricas "EFACEC"
(Arroteia — S. Mamede de Infesta)

Distinguem-se nesta fotografia :

— Um transformador de 15 000 kVA/60 000 V (marca EFACEC) com regulação em carga, em curso de fabrico.

— Um disjuntor de 220 000 V (marca SOPREL), aguardando ensaio de rigidez.

— Nota-se também um transformador de ensaios de 600 000 V

C. D. U. 536.212

RESOLUÇÃO DUM PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME NÃO PERMANENTE EM CILINDROS CONCÊNTRICOS

POR ANTÓNIO FRANCO DE OLIVEIRA FALCÃO

Bolseiro do I. A C.
Assistente do I. S. T.

NOMENCLATURA

t — tempo
r — raio
a, b — raios das superfícies cilíndricas de separação
$\theta(r, t)$ — temperatura
θ_0 — temperatura uniforme no instante $t = 0$
$T(r, t) = \theta(r, t) - \theta_0$ — subida de temperatura entre $t = 0$ e t
k — condutibilidade térmica
ρ — massa específica
c — calor específico
$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ — difusidade térmica
Meio exterior $r > b$: $T(r, t)$, k, ρ, c, α
Meio 1 $a < r < b$: $T_1(r, t)$, k_1, ρ_1, c_1, α_1
Meio 2 $0 < r < a$: $T_2(t) = T_1(a, t)$, $k_2 = \alpha_2 = \infty$, ρ_2, c_2
Q — quantidade de calor libertado por unidade de tempo e por unidade de comprimento

1 — INTRODUÇÃO

1.1 — A necessidade de resolver este problema surgiu quando estudávamos um método de determinação da condutibilidade térmica de fluidos, em que se utiliza um fio metálico revestido por uma camada isoladora, mergulhado no meio cuja condutibilidade se pretende determinar. O método baseia-se na curva da temperatura do fio em função do tempo, quando se liberta nele calor por efeito de Joule, devido a uma corrente eléctrica de intensidade constante.

A solução do problema tem ainda interesse no caso geral de fios eléctricos revestidos, em particular quando o aquecimento é provocado por curto-circuito.

1.2 — Carslaw e Jaeger [ref. 1] apresentam a solução de dois problemas que se podem considerar casos particulares do que apresentamos e que tratam do aquecimento de um fio cilíndrico de um material com condutibilidade térmica infinita, mergulhado num meio com dimensões infinitas, considerando ou não a existência duma resistência à passagem de calor na superfície de separação entre os dois meios.

2 — MODELO FÍSICO

Consideremos três meios, a que chamamos meio exterior, meio 1 e meio 2, limitados por superfícies cilíndricas de raios b e a, conforme se indica na figura 1.

Os meios são infinitos na direcção do eixo, homogéneos e isótropos e as suas propriedades físicas k, ρ, c não variam no intervalo de temperatura que interessa considerar. Admitimos que não há resistências à transmissão de calor nas superfícies de separação e que a transmissão se realiza exclusivamente por condução.

No momento inicial $t = 0$ os meios estão todos a uma temperatura uniforme θ_0. Para $t > 0$ liberta-se no meio 2 uma quantidade de calor constante Q por unidade de tempo e por unidade comprimento, uniformemente e em regime permanente.

A condutibilidade térmica k do meio 2 supõe-se infinita e por isso a temperatura nesse meio é uniforme em qualquer instante.

Pretende-se conhecer essa temperatura $\theta_2(t) = T_2(t) + \theta_0$ em função do tempo.

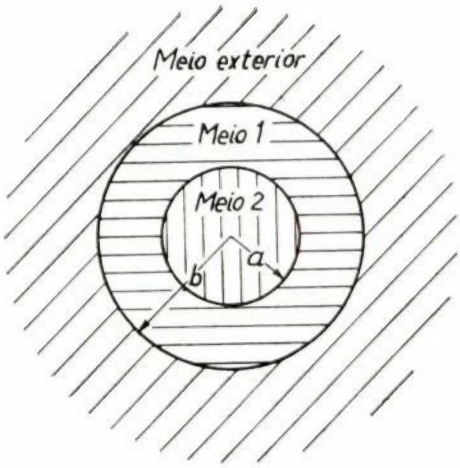


Fig. 1

3 — MODELO MATEMÁTICO

A equação da condução do calor, num meio onde se não gera ou consome calor, pode-se escrever, na forma geral:

$$\text{lap}\ \theta - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

Em coordenadas cilíndricas, sendo θ, por razões de simetria, apenas função do tempo t e do raio r, a equação acima pode escrever-se

$$\frac{\partial^2 \theta(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta(r,t)}{\partial t} = 0$$

Esta equação deve ser satisfeita no meio exterior e no meio 1. Substituindo $T(r,t) = \theta(r,t) - \theta_0$ resulta:

Meio exterior $$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad r > b \tag{1}$$

Meio 1 $$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} - \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \qquad a < r < b \tag{2}$$

As condições aos limites, que devem ser satisfeitas, são:

a) Continuidade do fluxo na superfície $r = a$:

$$Q = \pi a^2 \rho_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} - 2\pi a k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)_{r=a}$$

em que no 2° membro, o 1° termo representa a quantidade de calor acumulada no meio 2 e o 2° termo a quantidade transmitida para o meio 1 (por unidade de tempo).

Atendendo a que $T_2(t) = T_1(a,t)$ (continuidade da temperatura na superfície $r = a$) é

$$\frac{dT_2}{dt} = \left(\frac{\partial T_1}{\partial t}\right)_{r=a}$$

e a equação acima pode escrever-se:

$$Q = \pi a^2 \rho_2 c_2 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t}\right)_{r=a} - 2\pi a k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)_{r=a} \tag{3}$$

b) Continuidade do fluxo na superfície $r = b$:

$$k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=b} = k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_{r=b} \tag{4}$$

c) Continuidade da temperatura para $r = b$:

$$T(b,t) = T_1(b,t) \tag{5}$$

d) Uniformidade da temperatura para $t = 0$:

$$T(r,0) = T(r,0) = 0 \tag{6}$$

4 — APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

Definimos a transformada de Laplace da função $T(r,t)$ como sendo:

$$L[T(r,t)] = \overline{T}(r,p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, T(r,t)\, dt$$

sendo p um número cuja parte real é positiva, finita e suficientemente grande para tornar o integral (7) convergente.

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\, dt + \int_0^\infty e^{-pt} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}\, dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt = 0 \tag{7}$$

ou, usando as regras do cálculo operacional:

$$\frac{d^2\overline{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\overline{T}}{dr} - q^2 \overline{T} = 0 \qquad r > b \tag{8}$$

sendo $q^2 = \frac{p}{\alpha}$

Procedendo do mesmo modo para a equação (2), obtemos:

$$\frac{d^2 \overline{T_1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\overline{T_1}}{dr} - q_1^2 \overline{T_1} = 0 \qquad a < r < b \tag{9}$$

sendo $T_1 = \overline{T_1}(r,p) = L[\overline{T_1}(r,t)]$

e $q_1^2 = \frac{p}{\alpha_1}$

A transformação de Laplace reduziu as equações às derivadas parciais (1) e (2) a equações diferenciais ordinárias (8) e (9).

As equações (8) e (9) são casos particulares de equação de Bessel, sendo os seus integrais gerais:

$$\overline{T}(r,p) = A I_0(qr) + B K_0(qr) \qquad r > b \tag{10}$$

$$\overline{T_1}(r,p) = C I_0(q_1 r) + D K_0(q_1 r) \qquad a < r < b \tag{11}$$

I_0 e K_0 são as funções de Bessel modificadas de ordem zero, de 1.ª e 2.ª espécies, respectivamente, e A, B, C, D são constantes de integração a determinar.

Aplicando a transformação de Laplace às equações (3), (4) e (5) e atendendo a (6), obtemos as novas condições aos limites:

$$a) \quad \frac{Q}{p} = \pi a^2 \rho_2 c_2 p \overline{T_1}(a, p) - 2\pi a k_1 \left(\frac{d\overline{T_1}}{dr}\right)_{r=a} \tag{12}$$

$$b) \quad k\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=b} = k_1 \left(\frac{d\overline{T_1}}{dr}\right)_{r=b} \tag{13}$$

$$c) \quad \overline{T}(b, p) = \overline{T_1}(b, p) \tag{14}$$

Examinando a função (10), conclui-se que a constante A deve ser nula, para que $\overline{T}$ se não torne infinito quando $r \to \infty$, (pois $\lim |I_0(z)| = \infty$ quando a parte real de $z \to \infty$). As restantes constantes B, C, D obtêm-se a partir das condições aos limites (12), (13) e (14) e das regras de diferenciação das funções de Bessel:

$$\frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z)$$

$$\frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z)$$

sendo I_1 e K_1 as funções de Bessel modificadas de 1.ª ordem, de 1.ª e 2.ª espécies, respectivamente. Substituindo (10) e (11) em (12), (13) e (14) e pondo em evidência B, C, D, resulta

$$a) \quad C[\pi a^2 \rho_2 c_2 p I_0(q_1 a) - 2\pi a k_1 q_1 I_1(q_1 a)] + \\ + D[\pi a^2 \rho_2 c_2 p K_0(q_1 a) + 2\pi a k_1 q_1 K_1(q_1 b)] = \frac{Q}{p} \tag{15}$$

$$b) \quad B[kq K_1(qb)] + C[k_1 q_1 I_1(q_1 b)] - D[k_1 q_1 K_1(q_1 b)] = 0 \tag{16}$$

$$c) \quad B[K_0(qb)] - C[I_0(q_1 b)] - D[K_0(q_1 b)] = 0 \tag{17}$$

Deste sistema de equações podemos tirar o valor das três constantes, das quais nos interessam C e D, necessárias para a determinação de T_1:

$$C = \frac{Q}{p} \frac{1}{\Delta} [kq K_1(qb) K_0(q_1 b) - k_1 q_1 K_1(q_1 b) K_0(qb)] \tag{18}$$

$$D = -\frac{Q}{p} \frac{1}{\Delta} [kq K_1(qb) I_0(q_1 b) + k_1 q_1 I_1(q_1 b) K_0(qb)] \tag{19}$$

sendo Δ o determinante do sistema de equações:

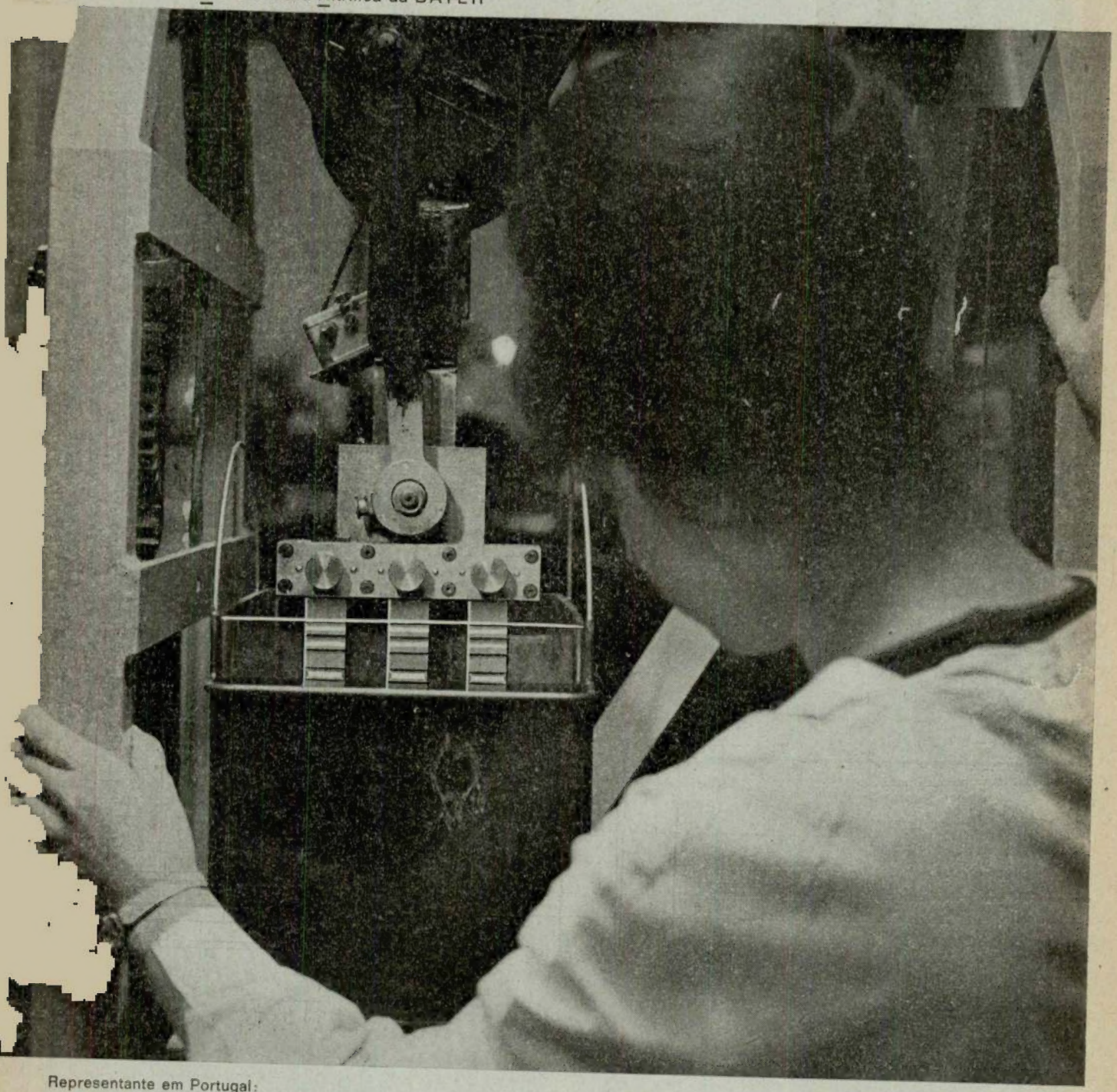
$$\Delta = kq K_1(qb) \{ K_0(q_1 b) [\pi a^2 \rho_2 c_2 p I_0(q_1 a) - 2\pi a k_1 q_1 I_1(q_1 a)] - \\ - I_0(q_1 b) [\pi a^2 \rho_2 c_2 p K_0(q_1 a) + 2\pi a k_1 q_1 K_1(q_1 a)] \} - \\ - k_1 q_1 K_0(qb) \{ K_1(q_1 b) [\pi a^2 \rho_2 c_2 p I_0(q_1 a) - 2\pi a k_1 q_1 I_1(q_1 a)] + \\ + I_1(q_1 b) [\pi a^2 \rho_2 c_2 p K_0(q_1 a) + 2\pi a k_1 q_1 K_1(q_1 a)] \} \tag{20}$$

® Perbunan N - resistente ao óleo e à gasolina

Artigos de borracha feitos da borracha butadieno-acrilnitrilo Perbunan N, da Bayer, resistem muito bem ao ataque de óleos, gorduras e gasolina, têm boa resistência ao calor e ao envelhecimento, assim como à abrasão.

Os nossos tipos de Perbunan N são excelentemente apropriados para artigos técnicos moldados, resistentes aos óleos e à gasolina, para solas e tacões especialmente resistentes ao desgaste, assim como para cintas de travões, para rolos, borracha para carimbos e telas de cauchu, resistentes aos óleos, para correias trapezoidais, correias transportadoras, tecidos gomados, bainhas de cabos eléctricos e mangueiras, especialmente mangueiras de gasolina. Produtos de alta qualidade exigem um controle permanente. O Perbunan N é controlado continuamente, afim de garantir uma alta qualidade sempre igual do material.

PERBUNAN N a Borracha Nitrílica da BAYER



Representante em Portugal:
S.A.R.L. QUIMICOR
Lisboa: Rua Sociedade Farmacêutica, 3
Tel. 555496 e 555893
Porto: Rua de Santos Pousada, 441
Tel. 54141

perbunan® n

1863 BAYER 1963